Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.10.2022

2. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 5: Beweisen Sie

$$\int_0^1 K_p(t)dt = \frac{1}{p!}\left(\frac{1}{p+1} - \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^p\right).$$

Aufgabe 6:

(a) Zeigen Sie: Für jede auf $[a, b]$ positive, stetige Funktion ω ist durch

$$(f, g) := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen reellwertigen Funktionen definiert.

(b) (Formel von Rodrigues) Zeigen Sie: Die bezüglich der Gewichtsfunktion ω auf dem Intervall $[a, b]$ orthogonalen Polynome p_k erfüllen

$$p_k(x) = C_k \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^k}{dx^k} \left[\omega(x)(x-a)^k (b-x)^k\right], \quad C_k \in \mathbb{R},$$

falls die rechte Seite ein Polynom vom Grad k ist.

Hinweis: Weisen Sie nach, dass das wie oben definierte Polynom orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$ ist. Verwenden Sie dazu partielle Integration.

Aufgabe 7: Gegeben seien die Trapezregel (TR) und die Mittelpunktsregel (MR) zur numerischen Approximation eines Integrals. Bestimmen Sie die Knoten und Gewichte der Quadraturformel

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \alpha \cdot TR + \beta \cdot MR$$

in Abhängigkeit von α und β. Für welche Wahl der Parameter wird die Ordnung maximal? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 8: Die Legendre-Polynome P_k sind durch die Bedingung $P_k(1) = 1$ normiert.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 6:

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \frac{d^k}{dx^k} \left[(1-x^2)^k\right].$$

(b) Zeigen Sie für die Legendre-Polynome die Rekursion

$$P_{k+1}(x) - \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) = -\frac{k}{k+1} P_{k-1}(x).$$

Besprechung der Übungsaufgaben am 02.11.2022.