



Numerik

Wintersemester 2021/22

Tübingen, 08.11.2021

Übungsblatt 4

Problem 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und diagonaldominant. Zeigen Sie: Dann existiert eine $L - R$ -Zerlegung von A , die mit Gaußscher Elimination *ohne* Zeilenvertauschung bestimmt werden kann.

Problem 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie: Dann existiert eine $L - R$ -Zerlegung von A , die mit Gaußscher Elimination *ohne* Zeilenvertauschung bestimmt werden kann.

Problem 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$. Zeigen Sie: Die Matrix $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist stets symmetrisch und positiv semi-definit. Im Fall $\text{Rang}(A) = n$ ist $A^T A$ sogar positiv definit.

Programmieraufgabe 1: LR-Zerlegung)

a) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `LRzer(A)`, welche zu einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrizen L, R der zugehörigen LR-Zerlegung zurückgibt. Sie dürfen hier und im Verlauf der Aufgabe annehmen, dass die Eingabematrix A eine eindeutige LR-Zerlegung besitzt. Die Matlab-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
1     function [L,R] = LRzer(A)
2     ...
3     end
```

b) Schreiben Sie die Matlab-Funktion `LRzer_loesen(L,R,b)`, welche zu gegebener linken unteren und rechter oberen Dreiecksmatrizen L und R und einem noch zusätzlich gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $(L \cdot R)x = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution berechnet und zurückgibt. Die Matlab-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
1     function [x] = LRzer_loesen(L,R,b)
2     ...
3     end
```

c) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `main_LRzer.m`, welches mit den in a) und b) geschriebenen Funktionen $Ax = b$ berechnet und ausgibt. Dabei gelten

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungsgruppen am 16.11.2021 statt. Abgabe von Programmieraufgabe 1 bis spätestens 22.11.2021 per Mail an: “ progtutor@na.uni-tuebingen.de “. Die genauen Details der Abgabe finden Sie auf der Vorlesungshomepage