EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Numerik

Wintersemester 2021/22 **Tübingen, 22.11.2021**

Übungsblatt 6

Problem 1. Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen (jeweils die Anzahl der Additionen bzw. Multiplikationen), die für die Berechnung eines Interpolationspolynoms in Lagrange-Darstellung nötig sind.

Problem 2. Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen beim dividierten Differenzen-Verfahren mit Newton-Polynomen. Vergleichen Sie diese mit der aus **Problem 1**. Was ist — abgesehen von weniger Rechenschritten — der Vorteil gegenüber dem Lagrange-Ansatz?

Problem 3. Gegeben sei die folgende Wertetabelle für die Secans Hyperbolicus Funktion $f(x) = \operatorname{sech}(x)$:

x_i	0.9	0.95	1.00	1.05	1.10
$f(x_i)$	0.697795	0.672845	0.648054	0.623521	0.599334

Bestimmen Sie durch Extrapolation des zentrierten Differenzenquotienten

$$a(h) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

eine Näherung zum Ableitungswert $f'(1)$. Rechnen Sie dabei mit 6 signifikanten Stellen.

Hinweis: Da f analytisch ist, gilt

$$a(h) = f'(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(2i+1)}(x)}{(2i)!} h^{2i}$$

.

Programmieraufgabe 2: (QR-Zerlegung).

a) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `QRzer(A)`, welche zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $Rang(A) = n$ zwei Matrizen Q, R zurückgibt, wobei $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ der für die Zerlegung entscheidende Teil der orthogonalen Matrix $\tilde{Q}$ ist und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix ist und $A = QR$ gilt. Verwenden Sie dabei den in der Vorlesung vorgestellten Householder-Algorithmus. Die MATLAB-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
function [Q,R] = QRzer(A)
```

```
    ...
    end
```

b) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion `QRzer_loesen(Q, R, b)`, welche Q und R wie in a) beschrieben und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ entgegen nimmt, und die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $QRx = b$ berechnet und zurückgibt. Bestimmen Sie den Vektor x mittels Rückwärtssubstitution. Die MATLAB-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
    function [x] = QRzer_loesen(Q,R,b)
    ...
    end
```

c) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `main_QRzer.m`, welches unter Verwendung der Funktionen `QRzer` und `QRzer_loesen` geeignete Koeffizienten $\gamma_j \; j = 1, ..., 5$ ermittelt, so dass die Funktion $f(x) = \sum_{j=1}^{5} \gamma_j \phi_j(x)$ mit

$$\phi_1(x) = x^2, \quad \phi_2(x) = x^4, \quad \phi_3(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \phi_4(x) = \exp(-(x-1)), \quad \phi_5(x) = \sin(2\pi x)$$

eine Ausgleichskurve der Messdaten

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x_i)$	100	14	61	68	60	35	22	80	90	105

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate ist. Hierbei dürfen Sie nicht die Gaußsche Normalengleichung verwenden.

Stellen Sie die ermittelte Ausgleichskurve zusammen mit den Messdaten in einem geeigneten Schaubild dar.

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungsgruppen am 30.11.2021 statt. Abgabe von Programmieraufgabe 2 bis spätestens 6.12.2021 per Mail an: “ *progtutor@na.uni-tuebingen.de* “. Die genauen Details der Abgabe finden Sie auf der Vorlesungshomepage.