EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Numerik

Wintersemester 2021/22 **Tübingen, 02.11.2021**

Übungsblatt 3

Problem 1. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Wir nehmen an, daß tatsächlich sämtliche Teilmatrizen $\boldsymbol{A}_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ — mit $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ für $1 \le k \le n$ — invertierbar sind. Zeigen Sie, daß es dann genau eine $\boldsymbol{LR}$-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$ gibt, mit $l_{ii} = 1$ für alle $1 \le i \le n$.

Hinweis: Argumentieren Sie per Induktion über n.

Problem 2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben seien Frobenius-Matrizen $L_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ der Form

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß die Inversen der Matrizen L_k wiederum Frobenius-Matrizen der Form

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

sind, und daß

$$L := L_1^{-1} L_2^{-1} \cdot \ldots \cdot L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{2,1} & \ddots & & & & \\ l_{3,1} & \ddots & 1 & & & \\ \vdots & & l_{k+1,k} & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \ldots & l_{n,k} & \ldots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungsgruppen am 09.11.2021 statt.