EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Numerik

Wintersemester 2021/22 **Tübingen, 25.10.2021**

Übungsblatt 2

Problem 1. Auf dem endlichdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent, *d.h.*: zu je zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ gibt es positive Zahlen m, M, sodaß

$$m\|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq M\|\mathbf{x}\|_a \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Problem 2. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die zu den Vektornormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ zugehörigen natürlichen Matrizennormen folgende Relationen erfüllen:

a) $|||\boldsymbol{A}|||_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$,

b) $|||\boldsymbol{A}|||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$,

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}|||\boldsymbol{A}|||_\infty \leq |||\boldsymbol{A}|||_2 \leq \sqrt{n}|||\boldsymbol{A}|||_\infty$.

Problem 3. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\boldsymbol{A} = \frac{1}{h}\mathrm{tridiag}(1,4,1)$ für $h \neq 0$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) \leq 3$ unabhängig von der Dimension n der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegung $\boldsymbol{A} = \frac{4}{h}(1+N)$ und betrachten sie die *Neumann'sche Reihe*

$$(1+\boldsymbol{N})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-\boldsymbol{N})^k\,,$$

um $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ abzuschätzen.

Die Besprechung der Aufgaben findet in den Übungsgruppen am 02.11.2021 statt.