Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.02.2021

11. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 40:

Betrachten Sie die folgende (misslungene) Matlab-Funktion,

```
function [z] = unknown_fun(z0,g,t)

k = 1000;
i = 1;
z = z0;
h = 10^-3;
d = f(z);

while (i<k) || (abs(d)>t)
    a = f(z);
    b = (1/h)*(f(z+h) - f(z-h));
    d = (1/b)*a;
    z = z + d;
    i = i + 1;
end
end
```

sowie das zugehrige (misslungene) Skript

```
xs = [-1,0,1];
sols = zeros(1,3);
e = zeros(1,3);
g=@(x)(x.^3+2);

for j=0:length(xs)
    sols(j) = unknown_fun(xs(j),g,0.01);
    e(j) = abs(g(sols(j)));
end
disp(e)
```

(a) Welcher aus der Vorlesung bekannte Algorithmus wird hier implementiert? Erklären Sie die Bedeutung der Eingabe- und Ausgabewerte der Funktion. Was wurde in der Variable e im obigen Skript berechnet?

(b) Welche Fehler wurden bei der Umsetzung begangen? Unterscheiden Sie zwischen Logik- und Syntaxfehlern. Korrigieren Sie die Fehler im Code, so dass das Skript und die Funktion lauffähig sind und korrekte Ergebnisse liefern. In Funktion und Skript befinden sich insgesamt 5 Fehler.

(c) Verändern Sie die Funktion nun so, dass Sie die vereinfachte Version des Algorithmus erhalten.

Aufgabe 41: Die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 998 & -1998 \\ 999 & -1999 \end{pmatrix}$$

werde mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Zeigen Sie: Die exakte Lösung erfüllt $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0?
Hinweis: Diagonalisierung von A.

Aufgabe 42: Es sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ gegeben. Aufgrund von Rundungsfehlern berechnet man beim Euler-Verfahren an Stelle von

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

gestörte Werte

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n) + \delta_n.$$

Es sei $\tilde{y}_0 = y_0$ und es gelte $\|\delta_n\| \leq \delta$. Zeigen Sie: Falls f einer Lipschitzbedingung mit Konstante L genügt, so ist

$$\|\tilde{y}_n - y_n\| \leq M\frac{\delta}{h}$$

mit $M = (e^{L(T-t_0)} - 1)/L$ für $t_n \in [t_0, T]$.
Hinweis: Lady Windermere's Fächer.

Aufgabe 43: Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = Ay + g(t, y)$, wobei $\mu(A) \leq \ell$ und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle (vgl. Aufgabe 39). Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n))$$

betrachtet. Zeigen Sie:

(a) Falls $\ell + L \leq 0$, so gilt für zwei beliebige Lösungen y, z

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| \qquad \text{für } t \geq t_0.$$

(b) Die numerische Lösung zu zwei Anfangswerten y_0, z_0 erfüllt für beliebige Schrittweiten $h > 0$

$$\|y_1 - z_1\| \leq \|y_0 - z_0\|,$$

verhält sich also wie die exakte Lösung.

Besprechung der Übungsaufgaben am 09. und 10. Feb. 2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätestens 09.02.21 12:00 Uhr.