Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.01.2021

10. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 37: Es seien $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \le n$. Zeigen sie:

(a) Falls $v^T M v > 0$ für alle $v \neq 0$ mit $Gv = 0$ und G vollen Rang besitzt, so ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar.

(b) Falls M symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine Zerlegung der Form

$$\begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ GL^{-T} & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & L^{-1}G^T \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Wieviele Operationen sind zur Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit einer derartigen Matrix nötig?

Aufgabe 38: Geben Sie einen Algorithmus an zur Lösung des Ausgleichsproblems mit nichtlinearen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \|Ax - b\| &= \min! \\ g(x) &= 0\,, \end{aligned}$$

der auf ein Gleichungssystem wie in Aufgabe 37 führt. Hierbei sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \ge n)$ mit vollem Rang und $b \in \mathbb{R}^m$ Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ mit $l < n$ sei zweimal stetig differenzierbar und $g'(x)$ habe in einer Umgebung der Lösung vollen Rang.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass eine Lösung x^* des obigen Minimierungsproblems mit Nebenbedinung existiert. Linearisieren Sie die Nebenbedingung in Anlehnung an das Newton- und das Gauß-Newton-Verfahren um x^*. Führen Sie dann einen Lagrangemultiplikator λ ein.

Aufgabe 39: Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Für $y, z \in D$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f(y) - f(z), y - z\rangle &\le \ell \cdot \|y - z\|^2 \qquad && \text{mit } \ell = \sup_{u\in D} \mu\left(f'(u)\right) \\ \|f(y) - f(z)\| &\le L \cdot \|y - z\| && \text{mit } L = \sup_{u\in D} \|f'(u)\|, \end{aligned}$$

wobei für euklidische Norm und Skalarprodukt und reelle $d \times d$-Matrizen A

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup_{v\neq 0} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|^2} = \text{größter Eigenwert von } \frac{1}{2}(A + A^T), \\ \|A\| &= \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^T A}. \end{aligned}$$

Hinweis: $f(y) - f(z) = \int_0^1 f'(z + t(y - z)) \cdot (y - z)\, dt$ und $\langle Av, v\rangle = \langle \frac{1}{2}(A + A^T)v, v\rangle$.

Programmieraufgabe 6: Es sei folgendes System von Differentialgleichungen gegeben:

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = -\beta \frac{I(t)S(t)}{N}$$
$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \beta \frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t)$$
$$\frac{\partial R(t)}{\partial t} = \gamma I(t).$$

Dieses System von DGL's ist ein sogenanntes SIR-Modell - ein klassischer Ansatz zur Modellierung der Ausbreitung von ansteckenden Krankheiten. Hier ist die Bevölkerung in drei Gruppen eingeteilt: Die Ansteckbaren $S(t)$ (=Susceptibles), die Infizierten $I(t)$ (=Infected) und die Genesenen bzw. Gestorbenen $R(t)$ (=Recovered). N steht für die Gesamtzahl an Menschen. β gibt die Anzahl an neuen Infektionen an, die eine neu infizierte Person pro Zeiteinheit verursacht. γ gibt die Rate an, in welcher eine infizierte Person in einer Zeiteinheit genesen oder sterben wird. Der bekannte R-Wert (Basisreproduktionszahl) lässt sich damit einfach durch $R = \beta/\gamma$ berechnen.
Um den weiteren Verlauf der Krankheit zu modellieren, muss man das obige System von Differentialgleichungen lösen. Lösen Sie dazu die obigen Differentialgleichungen mit dem expliziten Eulerverfahren zu den Werten $t_0 = 0$, $t_{end} = 26$,$\beta = 0.505$, $\gamma = 0.5$ und $y_0 = (83 \cdot 10^6, 2 \cdot 10^6, 2 \cdot 10^5)^T$ und Schrittweite $h = 0.13$. Diese Zahlen entsprechen grob den aktuellen Zahlen zur Coronapandemie in Deutschland (Stand 25.01.2021). Plotten Sie nun die Lösungen $S(t), I(t)$ und $R(t)$.

Hinweis: Wenn Sie die Parameter β und γ verändern, können Sie andere Modelle zum weiteren Pandemieverlauf aufstellen. Setzen Sie z.B. $\beta = 1$, so infiziert eine bereits infizierte Person pro Woche eine weitere Person. Bleibt die Person für zwei Wochen ansteckend (also $\gamma = 0.5$), so simulieren Sie einen R-Wert von 2.

Besprechung der Übungsaufgaben am 02. und 03. Feb. 2021.
Abgabe der Übungsaufgaben im URM bis spätestens 02.02.21 12:00 Uhr.
Abgabe der Programmieraufgabe bis 09.02.2021 an progtutor@na.uni-tuebingen.de.
Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA6_Nachname1_Nachname2_Nachname3.