

8. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 29:

Es sei die Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch $A = LL^T$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für $i = 1, \dots, n$ gilt $\|L\|_2^2 = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \geq l_{ii}^2$.

(b) Für $i = 1, \dots, n$ gilt $l_{ii}^2 \geq \min_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{1}{\|L^{-1}\|_2^2}$.

(c) Für die Konditionszahl $\text{cond}_2(L) = \|L\|_2 \|L^{-1}\|_2$ gilt $\text{cond}_2(L) \geq \max_{1 \leq i, k \leq n} \left| \frac{l_{ii}}{l_{kk}} \right|$.

Aufgabe 30:

Sei Q eine orthogonale $(n \times n)$ -Matrix, $n > 1$. Zeigen Sie, dass Q als Produkt von höchstens n Householder-Transformationen geschrieben werden kann (d.h., jede orthogonale Transformation des \mathbb{R}^n ist eine Hintereinanderausführung von höchstens n Reflexionen).

Aufgabe 31:

Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

Aufgabe 32: (Ausgleichsgerade)

Es liege das mathematische Gesetz $y = x_1 z + x_2$ mit zwei unbekanntem Parametern x_1, x_2 vor, zu dem ein Satz von Messdaten $\{y_l, z_l\}_{l=1, \dots, m}$ mit $z_l = l$ gegeben sei.

- (a) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = y$ auf. Wie lautet die Normalgleichung für das lineare Ausgleichsproblem?
- (b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LL^T$.
- (c) Schätzen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_2(L)$ mit Hilfe von Aufgabe 29 ab.

Programmieraufgabe 5:

In dieser Aufgabe implementieren Sie die Berechnung einer Ausgleichsparabel. Es liege das mathematische Gesetz $y = ax^2 + bx + c$ mit drei unbekanntem Parametern a , b und c vor. Schreiben Sie eine Funktion `[a, b, c] = quadReg(x, y)`, die die Koeffizienten a , b und c zu gegebenen Daten $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ ($n \geq 3$) bestimmt. Dabei soll eine Cholesky-Zerlegung der Matrix $A^T A$ benutzt werden, um die zugehörige Geradengleichung zu lösen.

Sie dürfen Programmieraufgabe 4 verwenden.

Gegeben seien nun die Daten

x_i	1	2	4	5	7	8	9
y_i	-3.7	-4.3	-3.3	0.2	16.1	24.2	38.5

Schreiben Sie ein Skript `testQuadReg`, welches obige Datenpunkte sowie die berechnete Regressionsparabel für $0 \leq x \leq 10$ in ein Schaubild plottet.

Besprechung der Übungsaufgaben am 19. und 20. Jan. 2021.

Abgabe der Programmieraufgabe bis 26.01.2021 an progtutor@na.uni-tuebingen.de.

Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA5_Nachname1_Nachname2_Nachname3.

Bitte tragen Sie sich bis zum 20.01.2021 für das Testat in der Doodle Umfrage ein!