

7. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 25:

(a) Sei $A = LR$ die LR-Zerlegung der $(n \times n)$ -Matrix A mit $|l_{ij}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{i,j} |r_{ij}| \leq 2^{n-1} \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$ für die Zeilen a_i^T und r_i^T von A und R und Induktion.

(b) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tritt Gleichheit in obiger Abschätzung auf.

Aufgabe 26: Gegeben sei eine $(n \times n)$ -Matrix A mit $\|A\| \leq r < 1$. Zeigen Sie: $I - A$ ist invertierbar und es gelten

(a) $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ (Neumannsche Reihe),

(b) $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-r}$.

Aufgabe 27: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass für die zur Betragssummen- und zur Maximumnorm gehörenden Matrixnormen gilt:

(a) $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)

(b) $\|A\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty}$

Aufgabe 28: Zeigen Sie:

$$\text{cond}(A) = \frac{\max_{\|y\|=1} \|Ay\|}{\min_{\|z\|=1} \|Az\|}.$$

Mithilfe der rechten Seite lässt sich die Kondition auch für nichtquadratische Matrizen definieren.

Programmieraufgabe 4:

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `L = cholesky(A)`, die die Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ einer symmetrisch positiv definiten Matrix A berechnet.
- (b) Schreiben Sie Funktionen `y = vorSub(L,b)` und `x = rueckSub(L,y)`, die die Gleichungssysteme $Ly = b$ und $L^T x = c$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen lösen.
- (c) Schreiben Sie ein Skript, in dem Sie das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 8 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 9 & 5 \\ 3 & -8 & 5 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 45 \\ 81 \end{pmatrix}$$

mit obigen Funktionen lösen.

Das Numerik-Team wünscht frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr! Bleiben Sie gesund!

Besprechung der Übungsaufgaben am 12. und 13. Jan. 2021.

Abgabe der Programmieraufgabe bis 12.01.2021 an progtutor@na.uni-tuebingen.de.

Abgabe in einem Zip-Ordner mit Name im Format: PA4_Nachname1_Nachname2_Nachname3.