Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 17.11.2020

2. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 5: Beweisen Sie

$$\int_0^1 K_p(t)dt = \frac{1}{p!}\left(\frac{1}{p+1} - \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^p\right).$$

Aufgabe 6:

(a) Zeigen Sie: Für jede auf $[a,b]$ positive, stetige Funktion ω ist durch

$$(f,g) := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen reellwertigen Funktionen definiert.

(b) (Formel von Rodrigues) Zeigen Sie: Die bezüglich der Gewichtsfunktion ω auf dem Intervall $[a,b]$ orthogonalen Polynome p_k erfüllen

$$p_k(x) = C_k \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^k}{dx^k}\left[\omega(x)(x-a)^k(b-x)^k\right], \quad C_k \in \mathbb{R},$$

falls die rechte Seite ein Polynom vom Grad k ist.

Hinweis: Weisen Sie nach, dass das wie oben definierte Polynom orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$ ist. Verwenden Sie dazu partielle Integration.

Aufgabe 7: Berechnen Sie die Knoten und Gewichte der Gauß-QF für $s = 3$.

Aufgabe 8: Eine Folge $\{S_n\}$ erfülle

$$S_{n+1} - S = \rho_n(S_n - S) \qquad \text{mit } \rho_n \to \rho, \quad \rho \neq 1.$$

Zeigen Sie, dass die durch die Aitken'sche Δ^2-Regel erhaltene Folge $\{S_n'\}$ schneller als die ursprüngliche Folge gegen S konvergiert, d. h.

$$\frac{S_n' - S}{S_n - S} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Die Folge $\{S_n'\}$ kann gegen S konvergieren, ohne dass $\{S_n\}$ konvergiert.

Besprechung in den Übungen am 24. und 25. Nov. 2020