EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle, Jörg Nick

Numerik

Wintersemester 2019/20 **Tübingen, 11.12.2019**

Übungsblatt 9

Problem 1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Gegeben sei eine Unterteilung $0 = x_0 < \ldots < x_n = 1$ des Intervalls $[0, 1]$. Zeigen Sie, daß für die Gewichte $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ einer Quadraturformel der Ordnung n mit paarweise disjunkten Knoten $\{x_i\}_{i=0}^n$, welche die Bedingung $x_i = 1 - x_{n-i}$ erfüllen, gilt: $\alpha_i = \alpha_{n-i}$, für $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Problem 2. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $I_n(f)$ eine Quadraturformel der Ordnung n mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_i und Gewichten $\alpha_i > 0$ für $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, daß für Funktionen $f \in C([a, b])$ gilt:

$$\Big| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_n(f) \Big| \leq 2(b-a) \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{C([a,b])} \,,$$

wobei $\mathcal{P}_n$ den Raum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$ bezeichnet.

Problem 3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Um ein Gauß-Quadraturverfahren der Ordnung $2n + 2$ mit Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ (und Gewichten $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$) zu konstruieren, wurde in der Vorlesung ein eindeutiges Polynom $p_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$ der Form

$$p_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren konstruiert. Dieses Polynom p_{n+1} hat die Eigenschaft, daß $(p_{n+1}, q)_\omega = 0$ für alle $q \in \mathcal{P}_n$. Zeigen Sie: Die Nullstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ des Polynoms p_{n+1} sind reell, einfach, und liegen im Intervall (a, b).

Programmieraufgabe 4: (Gauß-Tschebyscheff-Quadratur). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Aufgabe der Gauß-Quadratur besteht darin für eine gegebene Funktion $f \in C([a, b])$ und eine feste positive Gewichtsfunktion $\omega \in C((a, b))$, Integrale der Form $I(f\omega) := \int_a^b f(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x$ durch Quadratur der Form $I_n(f) := \sum_{i=0}^n f(x_i)\alpha_i$ mit einer speziellen Wahl von Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ und Gewichten $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ zu approximieren.

Nachfolgend wird die Gauß-Tschebyscheff-Quadratur betrachtet, d.h. $a = -1, b = 1$ und $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Man kann zeigen, dass

$$x_i = \cos\Big(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\Big), \quad \alpha_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad \forall i = 0, ..., n.$$

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `TschebyQuad(x, alpha)`, welche für die gegebenen Vektoren $\texttt{x} = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\texttt{alpha} = (\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ das Integral der Funktion $\tilde{f} : y \mapsto \exp(-y^2)$ mit Integrationsgrenzen $a = -1, b = 1$ unter Verwendung der Gauß-Tschebyscheff-Quadratur berechnet. Die zu integrierende Funktion $\tilde{f}$ soll in einer separaten MATLAB-Funktion `fschlange(y)` mit $y \in \mathbb{R}$ implementiert werden. Die MATLAB-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
function[s] = TschebyQuad(x,alpha)
...
end
```

Hinweis: Betrachten Sie die Darstellung $\tilde{f}(x) = f(x)\omega(x)$ und implementieren Sie die Funktion f ebenfalls in einer separaten MATLAB-Funktion `f(y)` mit $y \in \mathbb{R}$.

b) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `mainquadratur.m`, welches unter Verwendung der obigen MATLAB-Funktionen folgende Punkte realisiert:

(i) Berechnen Sie eine Referenzlösung ("exakte Lösung") des Integrals mit $n = 1000$.

(ii) Berechnen Sie die Approximation des Integrals der Funktion $\tilde{f}$ im Intervall $[-1, 1]$ mit unterschiedlichen Anzahlen an Stützstellen $n = 1, 5, 20, 50, 100$. Berechnen Sie unter Verwendung der Referenzlösung jeweils den zugehörigen Fehler.

(iii) Plotten Sie i für $i = 1, ..., 5$ gegen den berechneten Fehler doppelt logarithmisch und erklären Sie in einem Kommentar, was Sie beobachten.

Hinweis: Verwenden Sie zum Plotten den MATLAB-Befehl `loglog(.)`.

Besprechung der Übungsaufgaben am Dienstag, den 17.12.2019. Abgabe von Programmieraufgabe 4 bis spätestens 6.1.2020 per Mail an: " progtutor@na.uni-tuebingen.de ".