EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle, Jörg Nick

Numerik

Wintersemester 2019/20 **Tübingen, 04.12.2019**

Übungsblatt 8

Problem 1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x \in [-1,1]$ definieren wir das Tschebyscheff-Polynom

$$T_n(x) := \cos\big(n \arccos(x)\big) .$$

Zeigen Sie:

a) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, und für $n \geq 1$ gilt die folgende Rekursion:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) .$$

b) T_n ist ein Polynom vom Grad n und es gilt $|T_n(x)| \leq 1$.

c) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$T_n\Big(\cos(\frac{k\pi}{n})\Big) = (-1)^k .$$

d) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$T_n\Big(\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})\Big) = 0 .$$

e) Sei $\omega : (-1,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Zeigen Sie, daß

$$(T_j, T_k)_\omega = \begin{cases} \pi & \text{für } j = k = 0\,, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } j = k \neq 0\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall\, j,k \in \{0,1,\dots,n\} .$$

Problem 2. Sei $\big(\mathbb{H}, (\cdot,\cdot)_\mathbb{H}\big)$ ein Prähilbertraum, und $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$ ein endlich-dimensionaler Teilraum. Wir wissen bereits, daß für jedes $f \in \mathbb{H}$ genau ein $g \equiv g(f) \in \mathbb{S}$ mit Bestapproximations-Eigenschaft existiert. Zeigen Sie, daß gilt:

$$(f-g, \varphi)_\mathbb{H} = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{S} .$$

Problem 3: Zeigen Sie, daß die Summe der Gewichte von interpolatorischen Quadraturformeln immer die Intervall-Länge ist.

Besprechung der Übungsaufgaben am Dienstag, den 10.12.2019.