EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle, Jörg Nick

Numerik

Wintersemester 2019/20 **Tübingen, 27.11.2019**

Übungsblatt 7

Problem 1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Gegeben seien Punktepaare $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^n$ mit äquidistanten Knoten $x_j = \frac{2\pi j}{n+1}$.

a) Zeigen Sie, daß die diskrete Fouriertransformation $F_n : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, die durch ($i = \sqrt{-1}$)

$$\big(F_n(\mathbf{y})\big)_k := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} y_j \exp(-ijx_k)$$

definiert ist, folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\|F_n(\mathbf{y})\|_2 = \Big\| \frac{1}{\sqrt{n+1}} \mathbf{y} \Big\|_2 \qquad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n+1} .$$

b) Die Faltung $* : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ von zwei Vektoren $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1}$ (die in beide Indexrichtungen periodisch fortgesetzt sind) sind definiert durch

$$(\mathbf{y} * \mathbf{z})_k := \sum_{j=0}^{n} y_{k-j} z_j \qquad (k \in \{0, 1, \ldots, n\}) .$$

Zeigen Sie: Für alle $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1}$ gilt

$$\frac{1}{n+1} F_n(\mathbf{y} * \mathbf{z}) = \big(F_n(\mathbf{y})\big) \bullet \big(F_n(\mathbf{z})\big) ,$$

wobei $\bullet$ die punktweise Multiplikation ist, die durch $(\mathbf{y} \bullet \mathbf{z})_k := y_k z_k$ definiert ist.

Problem 2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\omega \in C([a, b])$ mit $\omega(x) > 0$ derart, daß

$$\int_a^b \omega(x)\,\mathrm{d}x < \infty .$$

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $(\cdot, \cdot)_\omega : C([a, b]) \times C([a, b]) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$(f, g)_\omega := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

wohldefiniert ist und ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen Funktionen ist.

b) (Formel von *Rodrigues*) Zeigen Sie: Die bezüglich der Gewichtsfunktion ω auf dem Intervall $[a, b]$

orthogonalen Polynome p_k erfüllen

$$p_k(x) = c_k \frac{1}{\omega(x)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \Big[\omega(x)(x-a)^k(b-x)^k\Big] \qquad (c_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0)\,,$$

falls die rechte Seite ein Polynom vom Grad k ist.

Hinweis: Zeigen Sie, daß das Polynom p_k orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$ ist. Verwenden Sie dazu partielle Integration.

Programmieraufgabe 3: Implementieren Sie eine Modifikation der Richardson'schen Extrapolation aus der Vorlesung.

a) Seien $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei a den zentralen Differenzenquotienten bezüglich der gegebenen Funktion f berechne. Schreiben Sie eine Funktion

```
function[z] = richard(f,x0,h0,q,nmax,tol)
...
end
```

die für Punkte $\big(x_0 + h_k^q, a(x_0 + h_k^q)\big)$ mit $h_k^q := 2^{-kq}h_0$ mit $h_0 \in \mathbb{R}$ und $k, q \geq 1$ die Ableitung $z := a(x_0 + h_k^q) = p_n(x_0 + h_k^q)$ approximiert, wobei p_n^k das Interpolationspolynom bezeichnet.

Die Auswertung von p_n^k soll mittels des Neville-Algorithmus erfolgen. Das Verfahren soll abbrechen, wenn der Fehler $|a_{k,k} - a_{k+1,k+1}| <$ `tol` oder die maximale Anzahl an Iterationen `nmax` erreicht ist. Geben Sie das Extrapolationstableau in der Konsole aus.

b) Approximieren Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 \sin(x)$ im Punkt $x_0 = 1$ auf mindestens 8 Nachkommastellen genau für $h_0 = 1$ und $q = 2$. Die Funktion f soll hierbei als anonyme Funktion implementiert werden. Schreiben Sie dazu ein Matlab-Skript `main.m`, welches diese Berechnungen ausführt.

Besprechung der Übungsaufgaben am Dienstag, den 03.12.2019. Abgabe von Programmieraufgabe 3 bis spätestens 11.12.2019 per Mail an: " progtutor@na.uni-tuebingen.de ".