



Numerik

Wintersemester 2019/20

Tübingen, 13.11.2019

Übungsblatt 5

Problem 1. Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen (jeweils die Anzahl der Additionen bzw. Multiplikationen), die für die Berechnung eines Interpolationspolynoms in Lagrange-Darstellung nötig sind.

Problem 2. Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen beim dividierten Differenzen-Verfahren mit Newton-Polynomen. Vergleichen Sie diese mit der aus **Problem 1**. Was ist — abgesehen von weniger Rechenschritten — der Vorteil gegenüber dem Lagrange-Ansatz?

Problem 3. Gegeben sei die folgende Wertetabelle für die Secans Hyperbolicus Funktion $f(x) = \operatorname{sech}(x)$:

x_i	0.9	0.95	1.00	1.05	1.10
$f(x_i)$	0.697795	0.672845	0.648054	0.623521	0.599334

Bestimmen Sie durch Extrapolation des zentrierten Differenzenquotienten

$$a(h) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

eine Näherung zum Ableitungswert $f'(1)$. Rechnen Sie dabei mit 6 signifikanten Stellen.

Hinweis: Da f analytisch ist, gilt

$$a(h) = f'(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(2i+1)}(x)}{(2i)!} h^{2i}$$

Programmieraufgabe 2: (Polynominterpolation).

Es sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

gegeben.

- a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `NewtonInter(x, y, u)`, welche für zwei übergebene Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$, die die Punkte (x_i, y_i) für $i = 0, \dots, n$, beinhalten und einen übergebenen Vektor $u \in \mathbb{R}^m$ die Koeffizienten c_i des Newton-Interpolationspolynoms p , sowie simultan die

Funktionswerte $v_j = p(u_j)$ für $j = 1, \dots, m$ mit Hilfe der dividierten Differenzen berechnet (ohne die Verwendung der beiden Matlab-Befehle `polyfit` und `polyval`) und in geeigneten Vektoren $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ bzw. $v \in \mathbb{R}^m$ zurückgibt. Sie dürfen hierbei annehmen, dass die Stützstellen x_i paarweise verschieden sind. Die MATLAB-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```

1     function [v,c] = NewtonInter(x,y,u)
2         ...
3     end

```

b) Implementieren Sie obige Funktion f , die zu x den Wert $f(x)$ liefert als MATLAB-Funktion. Die Funktion kann dann mittels `f(x)` aufgerufen werden und soll dabei folgende Gestalt haben:

```

1     function [y] = f(x)
2         ...
3     end

```

c) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `main.m`, welches unter Verwendung der Funktion `NewtonInter` folgende Punkte realisiert:

Interpolieren Sie die Funktion f im Intervall $[-1, 1]$ unter der Verwendung von Stützstellen $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right)$ mit $i = 0, \dots, n$ für $n = 4, 8, 12$. Plotten Sie die resultierenden Interpolationspolynome zusammen mit f in ein geeignetes Schaubild. Plotten Sie den Interpolationsfehler $|p(x) - f(x)|$ für alle $x \in [-1, 1]$ im Falle $n = 12$ in ein weiteres Schaubild. Verwenden Sie hierbei die MATLAB-Befehle `figure(1)` und `figure(2)` um unterschiedliche Schaubilder zu initialisieren.

Besprechung der Aufgaben in den Übungsgruppen am 19.11.2019. Abgabe von Programmieraufgabe 2 bis spätestens 27.11.2019 per Mail an: " progtutor@na.uni-tuebingen.de ".