EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle, Jörg Nick

Numerik

Wintersemester 2019/20 **Tübingen, 24.10.2019**

Übungsblatt 2

Problem 1. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die zu den Vektornormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ zugehörigen natürlichen Matrizennormen folgende Relationen erfüllen:

a) $|||\boldsymbol{A}|||_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$,

b) $|||\boldsymbol{A}|||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$,

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}|||\boldsymbol{A}|||_\infty \leq |||\boldsymbol{A}|||_2 \leq \sqrt{n}|||\boldsymbol{A}|||_\infty$.

Problem 2. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\boldsymbol{A} = \frac{1}{h}\mathrm{tridiag}(1,4,1)$ für $h \neq 0$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) \leq 3$ unabhängig von der Dimension n der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegung $\boldsymbol{A} = \frac{4}{h}(1+N)$ und betrachten sie die *Neumann'sche Reihe*

$$(1+\boldsymbol{N})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-\boldsymbol{N})^k\,,$$

um $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ abzuschätzen.

Problem 3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben seien Frobenius-Matrizen $L_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \{1,\dots,n-1\}$ der Form

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß die Inversen der Matrizen L_k wiederum Frobenius-Matrizen der Form

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

sind, und daß

$$L := L_1^{-1} L_2^{-1} \cdot \ldots \cdot L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{2,1} & \ddots & & & & \\ l_{3,1} & \ddots & 1 & & & \\ \vdots & & l_{k+1,k} & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \ldots & l_{n,k} & \ldots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Besprechung der Aufgaben in den Übungsgruppen am 29.10.2019.