EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle, Jörg Nick

Numerik

Wintersemester 2019/20 **Tübingen, 22.01.2020**

Übungsblatt 13

Dieses Übungsblatt dient zur Vorbereitung der Klausur - und wiederholt damit einige Themen der Vorlesung. Bitte beachten Sie, dass der gesamte Vorlesungsstoff Grundlage für die Klausur sein wird.

Problem 1. Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion.
Leiten Sie für drei äquidistante Stützstellen die zugehörigen abgeschlossenen Newton-Cotes Quadraturformel her und schreiben Sie diese in der Form

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i f(b_i),$$

mit zu bestimmenden Gewichten $\{\alpha_i\}_{i=0}^2$ und zu bestimmenden Knoten $\{b_i\}_{i=0}^2$. Unter welchem Namen ist die Quadraturformel bekannt?

Problem 2: Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und es existieren eine linke untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LR}$.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der in $\mathcal{O}(n)$ Rechenschritten überprüft, ob $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, ob eine solche Zerlegung in $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ eindeutig ist.

c) Führen Sie eine $\boldsymbol{LR}-$Zerlegung (ohne Pivotierung) durch der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Problem 3: Sei $T > 0$ und $\lambda > 0$. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad \forall t \in]0, T], \quad y(0) = 1.$$

Betrachten Sie das äquidistante Gitter $0 = t_0 < ... < t_N = T$ mit $t_n - t_{n-1} = h = \frac{T}{N}$, wobei $n = 1, ..., N$ und $N \in \mathbb{N}$.
Approximieren Sie obiges Anfangswerproblem mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens und zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} y_N^{EE} = e^{\lambda T},$$

wobei y_N^{EE} die zugehörige Euler-Approximierte von $y(T)$ bezeichnet.
In wie fern ändert sich das Vorgehen, wenn man statt des expliziten Euler-Verfahrens das implizite

Euler-Verfahren verwendet?
Hinweis: Die Iterationsvorschrift des impliziten Euler-Verfahrens lautet für ein allgemeines Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad \forall t \in [0, T], \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} y_0^{IE} &= y_0, \\ y_n^{IE} &= y_{n-1}^{IE} + hf(t_n, y_n^{IE}) \quad \forall n = 1, ..., N. \end{aligned}$$

Besprechung der Übungsaufgaben am Dienstag, den 28.01.2020.