EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle, Jörg Nick

Numerik

Wintersemester 2019/20 **Tübingen, 15.01.2020**

Übungsblatt 12

Problem 1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben sei das lineare DGL-System erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'(t) = Ay(t)\,, \qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}$, so ist

$$y(t) = e^{t\lambda}v$$

eine Lösung des DGL-Systems (1).

b) Wir definieren für $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\,.$$

Zeigen Sie, daß jedes y der Form

$$y(t) = e^{tA}b\,,$$

bei $b \in \mathbb{C}^n$ beliebig, eine Lösung des DGL-Systems (1) ist. Welchen Wert nimmt $y(0)$ an?

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) \quad \forall\, t > 0\,, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 2: Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = (1 + |y(t)|)^{-1} \quad \forall\, t > 0\,, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

a) Untersuchen Sie (2) auf (globale) Existenz und Eindeutigkeit.

b) Sei y die Lösung von (2) und sei z eine Lösung dieser Gleichung, allerdings zum Anfangswert $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}$. Leiten Sie eine Abschätzung von $|y(t) - z(t)|$ für $t > 0$ her.

Problem 3: Untersuchen Sie mithilfe der Resultate aus der Vorlesung die Lösbarkeitseigenschaften (eindeutig, global, beschränkt) der folgenden skalaren Anfangswertaufgaben:

(1) $y'(t) = \big(y(t)\big)^2$,

(2) $y'(t) = -\big(y(t)\big)^2$,

(3) $y'(t) = \sqrt{y(t)}$,

(4) $y'(t) = \cos\big(y(t)\big) - 2y(t)$,

jeweils für $t \geq 0$ und $y(0) = 1$.

Programmieraufgabe 6: (Explizites Euler-Verfahren).

Sei $0 \leq a < b$. Betrachten Sie das äquidistante Gitter $a = t_0 < ... < t_N = b$ mit $t_n - t_{n-1} = h = \frac{b-a}{N}$. Für ein allgemeines Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad \forall t \in [a, b], \\ y(a) &= y_a \end{aligned}$$

lautet das explizite Euler-Verfahren (auch Eulersche Polygonzugmethode)

$$\begin{aligned} y_0^{EE} &= y_a, \\ y_n^{EE} &= y_{n-1}^{EE} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}^{EE}) \quad \forall n = 1, ..., N. \end{aligned}$$

Betrachten Sie folgendes konkretes Anfangswertproblem:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \mathtt{mu}(1 - z_1^2(t))z_2(t) - z_1(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in [a, b], \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}(a) = z_a. \tag{3}$$

a) Schreiben Sie die MATLAB-Funktion $\mathtt{ExplEuler}(\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{N}, \mathtt{start}, \mathtt{mu})$, welche (3) auf $[a, b]$ unter Verwendung von $N \in \mathbb{N}$ äquidistanten Teilintervallen, des Anfangswerts $\mathtt{start} \in \mathbb{R}^2$, des Parameters $\mathtt{mu} \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens approximiert. Zurückgegeben werden sollen die Iterierten $y \in \mathbb{R}^{2\times(N+1)}$. Die MATLAB-Funktion soll dabei folgende Gestalt haben:

```
function[y] = ExplEuler(a,b,N,start,mu)
...
end
```

b) Schreiben Sie das MATLAB-Skript `maindgl.m`, welches unter Verwendung der obigen MATLAB-Funktion folgende Punkte realisiert:

   (i) Berechnen Sie eine Referenzlösung (“exakte Lösung”) obigen Anfangswertproblems (3) auf $[0, 50]$ mit Startwert $[2, 1]'$ und $\mathtt{mu} = 10$ unter Verwendung des expliziten Euler-Verfahrens und $N = 200000$ äquidistanten Teilintervallen.

   (ii) Berechnen Sie Approximationen der Lösung des Anfangswertproblems (3) unter Verwendung des expliziten Euler-Verfahrens mit unterschiedlichen Anzahlen an äquidistanten Teilintervallen $N = 2500, 10000, 50000, 100000$. Plotten Sie jeweils zu einem N_j die Referenzlösung sowie die Lösung des expliziten Euler-Verfahrens für die erste Komponente in ein geeignetes Schaubild.

Besprechung der Übungsaufgaben am Dienstag, den 21.01.2020. Abgabe von Programmieraufgabe 6 bis spätestens 29.01.2020 per Mail an: “ progtutor@na.uni-tuebingen.de “.