EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle, Jörg Nick

Numerik

Wintersemester 2019/20 **Tübingen, 08.01.2020**

Übungsblatt 11

Problem 1. Sei $a > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Nullstelle von $f(x) = \frac{1}{x} - a$ soll mithilfe des Newton-Verfahrens berechnet werden.

a) Zeigen Sie, daß die Iterationsvorschrift gegeben ist durch

$$x_{k+1} = x_k + x_k(1 - ax_k) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

b) Zeigen Sie, daß für den Fehler $e_k := x_k - \frac{1}{a}$ gilt:

$$e_{k+1} = -ae_k^2 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Zeigen Sie außerdem mit vollständiger Induktion, daß gilt:

$$e_k = -\frac{1}{a}\rho^{2^k} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,, \qquad \rho := |ax_0 - 1|\,.$$

Welche Bedingung an ρ und x_0 ist notwendig und hinreichend für die globale Konvergenz des Iterationsverfahrens?

c) Es sei $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ und $x_0 = \frac{3}{2}$. Bestimmen Sie die maximale Anzahl der erforderlichen elementaren Rechenoperationen zur Berechnung einer Näherung x_k für $\frac{1}{a}$ durch das Newton-Verfahren mit einem Fehler kleiner als 10^{-8}.

Problem 2: Seien $n, p \in \mathbb{N}$ mit $p < n$. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ glatte Funktionen mit der Eigenschaft, daß die zweite Ableitung (nach der ersten Komponente) der Lagrangefunktion $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, die durch

$$L(x, \mu) := f(x) + \mu^\top g(x)$$

gegeben ist, positiv definit auf dem Kern von g' ist. Sei x^* eine Lösung des Minimierungsproblems

$$f(x^*) = \min\big\{ f(x) : \, x \in \mathbb{R}^n,\; g(x) = 0 \big\}\,.$$

Der Punkt x^* heißt regulär, falls die Gradienten $\{\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_p(x^*)\}$ linear unabhängig sind. In der nichtlinearen Optimierung wird bewiesen, daß — falls x^* regulär und ein lokales Minimum von f ist —, es eindeutig bestimmte Lagrange-Multiplikatoren $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ gibt, sodaß $(x^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \mu^*) &= 0\,, \\ g(x^*) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

erfüllen. Dieses System besteht aus $n + p$ Unbekannten und $n + p$ Gleichungen.

a) Zeigen Sie, daß die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Lösung des Systems (1) gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(x^k, \mu^k) & \nabla g(x^k) \\ \nabla g(x^k)^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{k+1} - x^k \\ \mu^{k+1} - \mu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_x L(x^k, \mu^k) \\ -g(x^k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p\,,$$

wobei (x^k, μ^k) die aktuelle Iterierte bezeichnet für $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren aus dem ersten Teil durchführbar ist, d.h.: Zeigen Sie, daß die im Newton-Verfahren vorkommende Matrix invertierbar ist.

c) Seien nun $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ und $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2$ gegeben. Bestimmen Sie die Tupel (x^*, μ^*) als Lösung des Systems (1).

Besprechung der Übungsaufgaben am Dienstag, den 14.01.2020.