

14. Übungsblatt zur Numerik

Hinweis:

Für die Klausurzulassung müssen insgesamt 50% der theoretischen Aufgaben als gelöst angekreuzt sein, also 28 Aufgaben der 14 Übungsblätter.

Bitte beachten Sie die Informationen zur Klausur auf der Homepage.

Aufgabe 53:

In dieser Aufgabe wird zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ das folgende Verfahren betrachtet:

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right).$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als explizites Runge-Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge-Kutta-Koeffizienten an.
- (b) Bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens.

Aufgabe 54: Zeigen Sie: Ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i, \quad i = 1, \dots, s \tag{1}$$

angewandt auf die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist äquivalent zu einem Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf das autonome System $z' = F(z)$ mit

$$z = \begin{bmatrix} t \\ y \end{bmatrix}, \quad F(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{bmatrix}.$$

Diskutieren Sie zudem die Voraussetzung (1), indem Sie die innere Stufe Y_i als Näherung von $y(t_0 + c_i h)$ interpretieren.

Aufgabe 55: Auf das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0$$

werde ein explizites Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p mit s Stufen angewandt. Zeigen Sie:

- (a) $y_1 = P(h\lambda)y_0$, wobei $P(z)$ ein Polynom vom Grad s ist.
- (b) Falls $p = s$, so gilt

$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!}.$$

Aufgabe 56: Ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung q liefert Näherungswerte y_n und zugehörige Funktionswerte $f(t_n, y_n)$. Um eine Lösung auf dem gesamten Intervall zu bestimmen, kann man auf dem Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ die Lösung durch das Hermite-Polynom mit Randwerten y_n, y_{n+1} und Ableitungswerten $f(t_n, y_n), f(t_{n+1}, y_{n+1})$ approximieren.

Für welche Ordnung q ist der Fehler dieser Näherungslösung auf dem gesamten Integrationsintervall durch $\mathcal{O}(h^q)$ beschränkt ?