

13. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 49: Es sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ gegeben. Aufgrund von Rundungsfehlern berechnet man beim Euler-Verfahren an Stelle von

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

gestörte Werte

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n) + \delta_n.$$

Es sei $\tilde{y}_0 = y_0$ und es gelte $\|\delta_n\| \leq \delta$. Zeigen Sie: Falls f einer Lipschitzbedingung mit Konstante L genügt, so ist

$$\|\tilde{y}_n - y_n\| \leq M \frac{\delta}{h}$$

mit $M = (e^{L(T-t_0)} - 1)/L$ für $t_n \in [t_0, T]$.

Hinweis: Lady Windermere's Fächer.

Aufgabe 50: Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = Ay + g(t, y)$, wobei $\mu(A) \leq \ell$ und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle (vgl. Aufgabe 48). Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n))$$

betrachtet. Zeigen Sie:

- (a) Falls $\ell + L \leq 0$, so gilt für zwei beliebige Lösungen y, z

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| \quad \text{für } t \geq t_0.$$

- (b) Die numerische Lösung zu zwei Anfangswerten y_0, z_0 erfüllt für beliebige Schrittweiten $h > 0$

$$\|y_1 - z_1\| \leq \|y_0 - z_0\|,$$

verhält sich also wie die exakte Lösung.

Aufgabe 51: In dieser Aufgabe wird zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ die implizite Mittelpunktsregel betrachtet:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right).$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als implizites Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an.
- (b) Zeigen Sie, dass das Verfahren Ordnung 2 hat.

Aufgabe 52: Zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ verwende man für ein festes $\theta \in [0, 1]$ das θ -Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f(y_{n+1}) + (1 - \theta)f(y_n)).$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an. Wie nennt man die Verfahren für $\theta = 0$ bzw. $\theta = 1$?
- (b) Bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens in Abhängigkeit von θ .
Hinweis: Verwenden Sie, dass das Verfahren höchstens Ordnung 2 hat.