Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 15.01.2019

12. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 45: Es seien $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \le n$. Zeigen sie:

(a) Falls $v^T M v > 0$ für alle $v \neq 0$ mit $Gv = 0$ und G vollen Rang besitzt, so ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar.

(b) Falls M symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine Zerlegung der Form

$$\begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ GL^{-T} & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & L^{-1}G^T \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Wieviele Operationen sind zur Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit einer derartigen Matrix nötig?

Aufgabe 46: Geben Sie einen Algorithmus an zur Lösung des Ausgleichsproblems mit nichtlinearen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \|Ax - b\| &= \min! \\ g(x) &= 0\,, \end{aligned}$$

der auf ein Gleichungssystem wie in Aufgabe 45 führt. Hierbei sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \ge n)$ mit vollem Rang und $b \in \mathbb{R}^m$ Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ mit $l < n$ sei zweimal stetig differenzierbar und $g'(x)$ habe in einer Umgebung der Lösung vollen Rang.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass eine Lösung x^* des obigen Minimierungsproblems mit Nebenbedinung existiert. Linearisieren Sie die Nebenbedingung in Anlehnung an das Newton- und das Gauß-Newton-Verfahren um x^*. Führen Sie dann einen Lagrangemultiplikator λ ein.

Bonus[1]**:** Zeigen Sie, dass unter geeigneten Voraussetzungen an die Ableitungen von g lokal lineare Konvergenz vorliegt, also dass eine Konstante $\gamma < 1$ existiert, so dass $\|e_{k+1}\| \le \gamma \|e_k\|$, wobei $e_k = x^* - x_k$.

Aufgabe 47: Die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 998 & -1998 \\ 999 & -1999 \end{pmatrix}$$

werde mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Zeigen Sie: Die exakte Lösung erfüllt $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0?
Hinweis: Diagonalisierung von A.

[1] Mit dieser freiwilligen Aufgabe können Sie sich ein zusätzliches Kreuz verdienen.

Aufgabe 48: Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Für $y, z \in D$ gilt

$$\langle f(y) - f(z), y - z \rangle \leq \ell \cdot \|y - z\|^2 \qquad \text{mit } \ell = \sup_{u \in D} \mu\left(f'(u)\right)$$
$$\|f(y) - f(z)\| \leq L \cdot \|y - z\| \qquad \text{mit } L = \sup_{u \in D} \|f'(u)\|,$$

wobei für euklidische Norm und Skalarprodukt und reelle $d \times d$-Matrizen A

$$\mu(A) = \sup_{v \neq 0} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|^2} = \text{größter Eigenwert von } \frac{1}{2}(A + A^T),$$
$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^T A}.$$

Hinweis: $f(y) - f(z) = \int_0^1 f'(z + t(y - z)) \cdot (y - z)\, dt$ und $\langle Av, v \rangle = \langle \frac{1}{2}(A + A^T)v, v \rangle$.

Programmieraufgabe 6: Programmieren Sie Funktionen `expl_Euler` und `impl_Euler` zur Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabe 47. Die beiden Funktionen erwarten t_0 und t_{end}, einen Startwert $y_0 \in \mathbb{R}^2$ sowie eine Schrittweite h als Input-Parameter und geben eine Matrix y zurück, welche die Approximationen an die Lösung zu allen berechneten Zeitpunkten enthält.

Schreiben Sie zudem ein Skript, indem die Differentialgleichung mit $t_0 = 0$, $t_{end} = 1$, $y_0 = (2, 1)^T$ sowie den Werten

$$h \in \{0.01, 0.005, 0.0025, 0.002, 0.001\}$$

numerisch gelöst wird. Plotten Sie die Lösungen des expliziten Verfahrens zu den Schrittweiten $h = 0.0025$ und $h = 0.002$ in zwei verschiedene Schaubilder, sowie alle Lösungen des impliziten Verfahrens in ein drittes Schaubild. Erstellen Sie zudem einen `loglog`-Plot, in dem Sie den Fehler des *impliziten* Eulerverfahrens zum Zeitpunkt $t_{end} = 1$ gegen die verwendete Schrittweite h auftragen (vgl. Programmieraufgabe 1). Hierbei dürfen Sie verwenden, dass `expm(t*A)*y0` die exakte Lösung der Differentialgleichung ist.

Wie erklären Sie sich das Verhalten des expliziten Verfahrens?

Besprechung in den Übungen am 22.01.2019.
Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens 29.01.2019, 23:59 Uhr.