Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 08.01.2019

11. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 41: Sei p ein Polynom vom Grad n, dessen Nullstellen $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_n$ reell seien.

(a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren gegen ξ_1 konvergiert, falls der Startwert $x_0 > \xi_1$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ für $x > \xi_1$ das gleiche Vorzeichen haben. Zeigen Sie dann, dass das Newton-Verfahren eine monoton abnehmende Folge liefert.

(b) Falls x_0 viel größer als ξ_1 ist, konvergiert das Newton-Verfahren sehr langsam ($x_{k+1} \approx (1 - \frac{1}{n})x_k$).

Aufgabe 42: Zeigen Sie, dass es in $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1]$ eine Lösung (x^*, y^*) des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y^2 - 3x &= -3 \\ \frac{3}{4}\sin(x) &= y \end{aligned}$$

gibt. Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 43:

(a) Berechnen Sie iterativ $x = 1/a$ für ein gegebenes $a \neq 0$ ohne Division. Für welche Startwerte x_0 konvergiert das Verfahren?

(b) Geben Sie ein lokal quadratisch konvergentes Iterationsverfahren zur Berechnung von $x = \sqrt{a}$ für $a > 0$ an. Verwenden Sie dabei nur die arithmetischen Grundoperationen.

Aufgabe 44: Zeigen Sie für das gewöhnliche Newton-Verfahren unter den Voraussetzungen des Newton-Mysovskii-Theorems die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \|x_k - x^*\| &\leq \alpha \frac{\gamma^{2^k - 1}}{1 - \gamma^{2^k}}, \\ \|x_k - x^*\| &\leq \frac{\omega}{2(1 - \gamma^{2^k})} \|x_k - x_{k-1}\|^2. \end{aligned}$$

Besprechung in den Übungen am 15.01.2019.