Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 11.12.2018

9. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 33: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass für die zur Betragssummen- und zur Maximumsnorm gehörenden Matrixnormen gilt:

(a) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)

(b) $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$

Aufgabe 34: Zeigen Sie:

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{\max_{\|y\|=1} \|Ay\|}{\min_{\|z\|=1} \|Az\|}.$$

Mithilfe der rechten Seite lässt sich die Kondition auch für nichtquadratische Matrizen definieren.

Aufgabe 35: Seien y, z zwei Vektoren von Gleitpunktzahlen. Das Standardskalarprodukt lässt sich rekursiv durch $\langle y, z \rangle = z_n y_n + \langle y^{n-1}, z^{n-1} \rangle$ berechnen, wobei $y^{n-1} := (y_1, \cdots, y_{n-1})^T$, z^{n-1} analog. Zeigen Sie: Das in Gleitpunktrechnung erhaltene Ergebnis $\langle y, z \rangle_{fl}$ des Skalarproduktes ist gleich $\langle \hat{y}, z \rangle$ für ein $\hat{y}$ mit

$$|y - \hat{y}| \leq n|y|\mathrm{eps} + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2).$$

Aufgabe 36: Seien L, R untere bzw. obere Dreiecksmatrizen von Gleitpunktzahlen, b, c Vektoren von Gleitpunktzahlen. Zeigen Sie: Die in Gleitpunktrechnung erhaltenen Ergebnisse $\hat{x}$, $\hat{y}$ für die Gleichungssysteme $Ly = b$, $Rx = c$ sind die exakten Lösungen von $\hat{L}\hat{y} = b$ mit $|L - \hat{L}| \leq n|L|\mathrm{eps} + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2)$ bzw. $\hat{R}\hat{x} = c$ mit $|R - \hat{R}| \leq n|R|\mathrm{eps} + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2)$.
Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 35.

Besprechung in den Übungen am 18.12.2018.