Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.11.2018

6. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 21: Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ das Gleichungssystem für den kubischen Spline s mit

$$\begin{aligned} s(x_j) &= 0 \qquad \text{für } j = 0, \dots, n \\ s'(x_0) &= 1 \quad\ s'(x_n) = 0 \end{aligned}$$

auf. Zeigen Sie, dass die Steigungen $v_j = s'(x_j)$ mit wachsendem j rasch abfallen.

Interpretation: Störungen in den Ableitungen am Rand wirken sich im interpolierenden Spline auf Intervallen weg von x_0 kaum aus.

Aufgabe 22: Der kubische Spline minimiert $\int_a^b [s''(x)]^2 dx$. Minimiert man allgemeiner

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx + \lambda^2 \int_a^b [s'(x)]^2 dx,$$

erhält man einen Spline, bei dem zusätzlich die Länge minimiert wird. Dies entspricht physikalisch einem Balken unter Zug. Für einen derartigen Spline ergibt sich der Ansatz

$$s_i(x) = a_i + b_i x + c_i e^{\lambda x} + d_i e^{-\lambda x}.$$

Erklären Sie den Ansatz und definieren Sie natürliche, periodische und eingespannte Splines unter Zug.

Aufgabe 23: Geben Sie einen Algorithmus an, welcher das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 20 mit einem Rechenaufwand löst, der nur linear mit der Anzahl der Stützstellen wächst.

Aufgabe 24:

(a) Berechnen Sie mit dem Newton-Schema das Interpolationspolynom $p(x)$ zu folgenden Daten:

x_j	0	1	2	3	4
y_j	-1	-1	-7	-7	35

Berechnen Sie mit diesem Newton-Schema auch alle Ableitungen von p an der Stelle $x = -1$.

(b) Stellen Sie das Polynom $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ mit Hilfe des Newtontableaus in der Form $p(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ dar.

Besprechung in den Übungen am 27.11.2018