Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 13.11.2018

5. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 17:

(a) Berechnen Sie das Hermite-Interpolationspolynom zu den Daten

x_j	-1	1
y_j	1	7
y'_j	-1	3

sowie $p(0)$.

(b) Sei $f \in C^4[x_0, x_1]$, $h = x_1 - x_0$ und p sei das kubische Hermite-Interpolationspolynom mit $p(x_i) = f(x_i)$ und $p'(x_i) = f'(x_i)$ für $i = 0, 1$. Zeigen Sie:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{\xi \in [x_0, x_1]} |f^{(4)}(\xi)| , \quad x \in [x_0, x_1] .$$

Aufgabe 18: Der eingespannte kubische Spline s erfülle die Interpolationsbedingungen

j	0	1	2	3
x_j	0	1	2	3
y_j	-4	9	35	70

sowie $s'(0) = 10$ und $s'(3) = 40$. Berechnen Sie $s(x)$ an der Stelle $x = 1.5$.

Aufgabe 19: Falls die Werte der Ableitungen an den Randpunkten nicht bekannt sind, verwendet man bei der Spline-Interpolation häufig die „not-a-knot“-Bedingungen

$$s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1), \qquad s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1}),$$

die besagen, dass der Spline auf den Teilintervallen $[x_0, x_2]$ und $[x_{n-2}, x_n]$ durch je ein einziges kubisches Polynom gegeben ist.

Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ das Gleichungssystem für den interpolierenden kubischen Spline mit „not-a-knot“-Bedingungen auf. Zeigen Sie, dass es stets eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 20: (Periodische kubische Spline-Interpolation)

Soll eine periodische Funktion durch einen Spline s dargestellt werden, so verlangt man an Stelle der Endbedingungen für einen natürlichen oder eingespannten Spline, dass die periodische Fortsetzung zweimal stetig differenzierbar ist. Stellen Sie für den Fall äquidistanter Stützstellen das lineare Gleichungssystem für die unbekannten Steigungen in den Stützstellen auf und zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit des interpolierenden periodischen Splines.

Hinweis: Sie erhalten eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \star & \star & & & \star \\ \star & \star & \star & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \star & \star & \star \\ \star & & & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Programmieraufgabe 3:

(a) Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ und $n \geq 0$. Schreiben Sie eine Funktion `clenshaw_coeff(f,n)`, welche die Koeffizienten (c_k) des Clenshaw-Algorithmus berechnet. Schreiben Sie eine Funktion `clenshaw_eval(c,x)`, welche den Clenshaw-Algorithmus an der Stelle `x` auswertet, wobei `c` der Koeffizientenvektor ist.

(b) Schreiben Sie dann ein Skript `clenshaw_bsp`, welches die Funktion $f(x) = \arctan(5x)$ sowie die Interpolationspolynome für $n = 4, 6, 8$ in ein Schaubild plottet.

Besprechung in den Übungen am 20.11.2018
Abgabe der Programmieraufgabe bis 27.11.2018, 23:59 Uhr