Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 06.11.2018

4. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 13: Zeigen Sie: Die Tschebyscheff-Polynome $T_0, T_1, \ldots$ sind orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) g(x)\, dx.$$

Aufgabe 14: Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2} c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x).$$

Falls

$$\begin{aligned} d_k &= c_k + 2x\, d_{k+1} - d_{k+2} \quad (k = n, n-1, \ldots, 0), \quad d_{n+1} = d_{n+2} = 0, \\ e_k &= d_k + 2x\, e_{k+1} - e_{k+2} \quad (k = n, n-1, \ldots, 1), \quad e_{n+1} = e_{n+2} = 0, \end{aligned}$$

dann ist bekanntlich $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$ (Clenshaw). Zeigen Sie, dass außerdem gilt:

$$p'(x) = e_1 - e_3.$$

Aufgabe 15: Gegeben sei das Interpolationspolynom $p(x)$ von $f(x)$ zu den Stützstellen $x_0, x_0 + \varepsilon, x_0 + 2\varepsilon, \ldots, x_0 + n\varepsilon$, wobei f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar sei.

(a) Zeigen Sie, dass $p(x)$ für $\varepsilon \to 0$ gegen das n-te Taylorpolynom von $f(x)$ in x_0 konvergiert.

(b) Bestimmen Sie die Form des Interpolationsfehlers $f(x) - p(x)$ für $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 16: Zeigen Sie, dass für ein Polynom p vom Grad n eine brauchbare und leicht zu berechnende Schätzung von $\max_{x \in [-1,1]} |p(x)|$ durch $\max_{k=0,\ldots,n} |p(x_k)|$ gegeben ist, falls x_k die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_{n+1} sind: Finden Sie eine möglichst kleine Konstante C_n, so dass

$$\max_{x \in [-1,1]} |p(x)| \le C_n \cdot \max_{k=0,\ldots,n} |p(x_k)|$$

Besprechung in den Übungen am 13.11.2018