Aufgabe 8 Die Legendre-Polynome sind durch die Bedingung $P_k(1) = 1$ normiert. Zu zeigen ist:

1. Es gilt:
$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!2^k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[(1-x^2)^k \right] .$$

2. Die Legendre-Polynome erfüllen die 3-Term-Rekursion
$$-\frac{k+1}{k} P_{k+1}(x) + \frac{2k+1}{k} x P_k(x) = P_{k-1}(x) .$$

Beweis. (a) Bei den Legendre-Polynomen ist nach Definition $a = -1$, $b = 1$ und $\omega(x) \equiv 1$. Mit der vorigen Aufgabe folgt daher sofort

$$P_k(x) = C_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[(1-x^2)^k \right] .$$

Es genügt, also die Konstante C_k aus der Normierungsbedingung zu berechnen. Wir schreiben $(1 - x^2)^k = (1-x)^k(1+x)^k$ und berechnen mit dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(1-x^2)^k] &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}x^{k-j}} (1+x)^k \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} (1-x)^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{k!}{j!} (1+x)^j \frac{k!}{(k-j)!} (-1)^j (1-x)^{k-j}
\end{aligned}$$

Setzt man $x = 1$ ein, verschwinden alle Summanden mit Ausnahme von $j = k$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
1 = P_k(1) &= C_k \binom{k}{k} \frac{k!}{k!} (1+1)^k \frac{k!}{0!} (-1)^k \\
&= C_k 2^k k! (-1)^k .
\end{aligned}$$

Daraus folgt die erste Behauptung.

(b) Wir bezeichnen die linke Seite mit $g(x)$ und zeigen drei Eigenschaften:

1. $g(x)$ ist orthogonal auf allen Polynomen vom Grad $\leq k-2$,
2. $g(1) = 1$,
3. $\deg g(x) = k-1$.

Dann folgt die Behauptung aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für orthogonale Polynome.

1. Sei q ein Polynom vom Grad $\leq k-2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle g, q \rangle &= \frac{2k+1}{k} \langle x P_k(x), q \rangle - \frac{k+1}{k} \langle P_{k+1}, q \rangle \\
&= \frac{2k+1}{k} \langle P_k(x), x q(x) \rangle = 0 ,
\end{aligned}$$

da $\deg x q(x) \leq k-1$ und $P_k(x)$ orthogonal auf allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$.

2. Da $P_k(1) = 1 = P_{k+1}(1)$, folgt sofort

$$g(1) = \frac{2k+1}{k} \cdot 1 \cdot P_k(1) - \frac{k+1}{k} P_{k+1}(1) = 1 .$$

3. Mit den binomischen Lehrsatz stellt man fest, dass der führende Term von $P_k(x)$ gegeben ist durch

$$C_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(-x^2)^k = \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{(2k)!}{k!}(-1)^k x^k = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} x^k\,.$$

Außerdem treten bei $P_k(x)$ stets nur Monome der Form x^k, x^{k-2}, x^{k-4}, …, auf. Für $g(x)$ bedeutet das, da P_{k+1} und xP_k auftreten, dass nur x^{k+1}, x^{k-1}, x^{k-3} usw. auftreten. Wir zeigen daher, dass der führende Term den Koeffizienten 0 hat. Zur Berechnung verwenden wir obige Formel für den führenden Koeffizienten

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{2k+1}{k} x P_k(x) - \frac{k+1}{k} P_{k+1}(x) \\
&= \left(\frac{2k+1}{k} \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} - \frac{k+1}{k} \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}((k+1)!)^2} \right) x^{k+1} + r_{k-1}(x) \\
&= \left(\frac{(2k+1)! \cdot 2(k+1)(k+1) - (k+1)(2k+2)!}{k 2^{k+1}((k+1)!)^2} \right) x^{k+1} + r_{k-1}(x) \\
&= \left(\frac{(2k+1)!(2k+2)(k+1) - (k+1)(2k+2)!}{k 2^{k+1}((k+1)!)^2} \right) x^{k+1} + r_{k-1}(x) \\
&= r_{k-1}(x)\,.
\end{aligned}$$

Somit folgt zunächst $\deg g(x) \leq k-1$. Dass der Grad nicht echt kleiner als $k-1$ sein kann, folgt aus 1. Somit ist $\deg g(x) = k-1$ und aufgrund des Eindeutigkeitssatzes folgt die Behauptung. □