

## 8. Übungsblatt zur Numerik

**Aufgabe 29:** Seien  $y, z$  zwei Vektoren von Gleitpunktzahlen. Das Standardskalarprodukt lässt sich rekursiv durch  $\langle y, z \rangle = z_n y_n + \langle y^{n-1}, z^{n-1} \rangle$  berechnen, wobei  $y^{n-1} := (y_1, \dots, y_{n-1})^T$ ,  $z^{n-1}$  analog. Zeigen Sie: Das in Gleitpunktrechnung erhaltene Ergebnis  $\langle y, z \rangle_{fl}$  des Skalarproduktes ist gleich  $\langle \hat{y}, z \rangle$  für ein  $\hat{y}$  mit

$$|y - \hat{y}| \leq n|y|\text{eps} + \mathcal{O}(\text{eps}^2).$$

**Aufgabe 30:** Seien  $L, R$  untere bzw. obere Dreiecksmatrizen von Gleitpunktzahlen,  $b, c$  Vektoren von Gleitpunktzahlen. Zeigen Sie: Die in Gleitpunktrechnung erhaltenen Ergebnisse  $\hat{x}, \hat{y}$  für die Gleichungssysteme  $Ly = b$ ,  $Rx = c$  sind die exakten Lösungen von  $\hat{L}\hat{y} = b$  mit  $|L - \hat{L}| \leq n|L|\text{eps} + \mathcal{O}(\text{eps}^2)$  bzw.  $\hat{R}\hat{x} = c$  mit  $|R - \hat{R}| \leq n|R|\text{eps} + \mathcal{O}(\text{eps}^2)$ .

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 29.

**Aufgabe 31:** Für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , ist die Konditionszahl definiert durch  $\text{cond}(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|y\|=1} \|Ay\|}$ .

Sei  $A = QR$  die QR-Zerlegung von  $A$  mit  $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ . Zeigen Sie, dass für die zur euklidischen Norm gehörende Kondition  $\text{cond}_2$  gilt:

(a)  $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R) = \text{cond}_2(\tilde{R}) \geq \frac{\max_{i=1, \dots, n} |r_{ii}|}{\min_{k=1, \dots, n} |r_{kk}|}$ .

(b)  $\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(A)^2$ .

**Aufgabe 32:** Sei  $Q$  eine orthogonale  $(n \times n)$ -Matrix,  $n > 1$ . Zeigen Sie, dass  $Q$  als Produkt von höchstens  $n$  Householder-Transformationen geschrieben werden kann (d.h., jede orthogonale Transformation des  $\mathbb{R}^n$  ist eine Hintereinanderausführung von höchstens  $n$  Reflexionen).

### **Besprechung in den Übungen am 20.12.2016**

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,

eberle@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr