

9. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 29: Seien A und T $n \times n$ Matrizen und T invertierbar. Geben Sie einen Algorithmus an, der $T^{-1}AT$ in $\frac{7}{3}n^3 + O(n^2)$ Operationen berechnet.

Berechnen Sie mit diesem Algorithmus $T^{-1}AT$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 19 \\ 0 & -12 & 50 \\ 9 & -18 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30: Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen (falls durchführbar) die Struktur von Bandmatrizen in folgendem Sinne erhält: Falls $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > p$, so ist $l_{ij} = 0$ für $i - j > p$ und $r_{ij} = 0$ für $j - i > p$.

Wie viele Operationen sind zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer derartigen Matrix nötig?

Aufgabe 31: Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung LL^T der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 14 \\ 8 & 14 & 29 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (26 \ 44 \ 80)^T$ und $b = (168 \ 290 \ 547)^T$ durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution. Sie dürfen die Aufgabe gerne mittels eines Matlab-Programms lösen. Beachten Sie bitte die Programmieraufgabe unten.

Aufgabe 32: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, daß für die zur Betragssummen- und zur Maximumsnorm gehörenden Matrixnormen gilt:

- (a) $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)
- (b) $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)
- (c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$

Programmieraufgabe 9: (Gauß Elimination, Glättung)

Realisieren Sie den Algorithmus aus Aufgabe 23, indem Sie eine Matlab-Funktion `LRa23` für die LR-Zerlegung und eine Funktion `RueckSub` für die Rückwärtssubstitution, entsprechend `VorSub`, schreiben. Dabei sollte Ihre Implementierung linearen Rechenaufwand besitzen. Die Matlab-Funktionen sollen die folgende Struktur besitzen:

```
function [L,R] = LRa23(A)           function [x] = RueckSub(R,c)
    :                               :
    :                               :
end                                 end
```

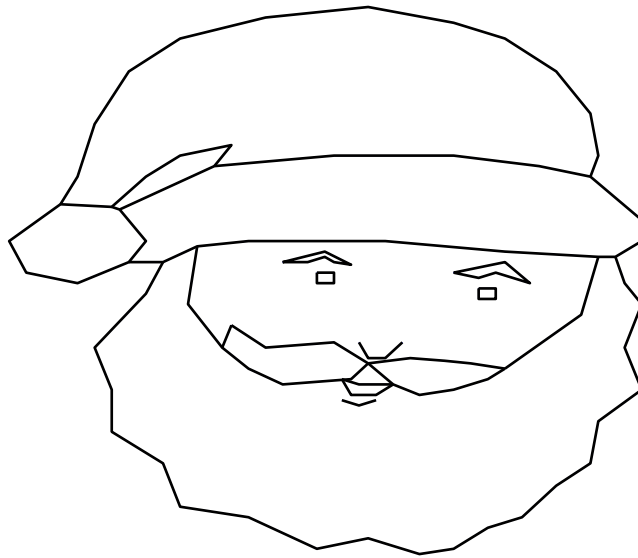
entsprechend `[c] = VorSub(L,b)`.

Testen Sie Ihr Programm in einem Skript `mainLR`, indem Sie den periodischen 2-dimensionalen Spline durch die Daten

x_i	24	27	28.5	27.5	26.5	25.5	24
y_i	27	28	26	26.5	27	26.5	27

berechnen und plotten. Wählen Sie eine äquidistante Parametrisierung.

Freiwillige (ohne Abgabe): Glätten Sie die Kanten des Bildes unten, welches durch `DatanP9.m` generiert ist, auch mit Hilfe der Programme aus Programmieraufgabe 6. Die Datei finden Sie auf der Übungshomepage.



Besprechung in den Übungen am 14.12.2012

Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 20.12.2012 (Donnerstag!)