

8. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 26: Sei $f \in C^4([a, b])$ und sei dazu s der eingespannte interpolierende Spline zu einer äquidistanten Unterteilung des Intervalls. Zeigen Sie: Für die zweite Ableitung gilt in den Stützstellen

$$|f''(x_i) - s''(x_i)| \leq \frac{1}{3} h^2 \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(4)}(\xi)| \quad (i = 1, \dots, n - 1).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Integraldarstellung des Restglieds bei der Taylorentwicklung.

Aufgabe 27: Jedes Element T_{ik} im h^2 -Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen.

- (a) Zeigen Sie, dass $T_{2,2}$ bei Verwendung der Folge $\{n_j\} = \{1, 2, 3\}$ der Simpsonregel entspricht.
- (b) Welcher Quadraturformel entspricht $T_{3,3}$?

Aufgabe 28: Berechnen Sie $\arctan''(1)$ durch Extrapolation für $h = 1/n$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ so, dass der Fehler $|e_j| := |T_{j,j} - T_{j,j-1}|$ kleiner als 10^{-5} ist oder $|e_j| > |e_{j-1}|$ gilt. Gerne schreiben Sie dazu ein Matlab-Programm, welches nicht abgegeben werden soll.

Programmieraufgabe 7: (Numerische Differentiation, Extrapolation)

Ziel dieser Aufgabe ist, das h^2 -Extrapolationstableau zur Berechnung der zweiten Ableitung von $f(x) = \exp(x^2)$ in $x = 0$ zu programmieren. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (a) Die Funktion f soll in der Matlab-Funktion `f_a7` implementiert werden.
- (b) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `DiffQuotient`, welche zu gegebenem h und x den entsprechenden Differenzenquotienten auswertet.
- (c) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `TSchema`, welche die Einträge des in der Vorlesung vorgestellte Extrapolationstableaus berechnet und zurückgibt.

Die Matlab-Funktionen sollen die folgende Struktur besitzen:

```
function [y] = DiffQuotient(x,h)           function [T] = TSchema(x,H,n)
    :                                       :
    :                                       :
end                                         end
```

Schreiben Sie ein Matlab-Skript `mainExtra`, welches für die Folge $\{n_j\} = \{1, 2, 3, 4\}$ und Grundschrittweite $H = 0.1$ eine Näherung von $f''(0)$ berechnet und ausgibt. Geben Sie auch die Fehler $T_{j,1} - f''(0)$ und $T_{j,j} - f''(0)$ aus.

Programmieraufgabe 8: Programmieren Sie das h^2 -Extrapolationstableau für die extrapolierte Trapezregel zur Berechnung von $\int_0^\pi \sin(x) dx$. Verwenden Sie die Folge $\{n_j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16\}$. Geben Sie die Fehler $T_{j,1} - 2$, $T_{j,j} - 2$ sowie die Fehlerschätzung $T_{j,j} - T_{j,j-1}$ aus.

Besprechung in den Übungen am 07.12.2012
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 13.12.2012 (Donnerstag!)