Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 23.11.2012

7. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 22: Der kubische Spline minimiert $\int_a^b [s''(x)]^2 dx$. Minimiert man allgemeiner

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx + \lambda^2 \int_a^b [s'(x)]^2 dx,$$

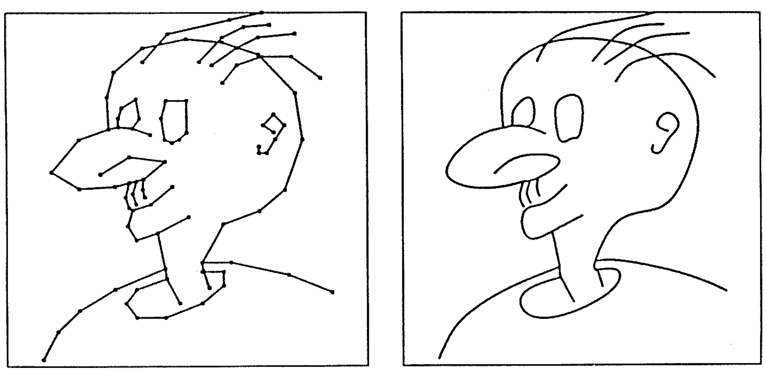
erhält man einen Spline, bei dem zusätzlich die Länge minimiert wird. Dies entspricht physikalisch einem Balken unter Zug. Für einen derartigen Spline ergibt sich der Ansatz

$$s_i(x) = a_i + b_i x + c_i e^{\lambda x} + d_i e^{-\lambda x}.$$

Erklären Sie den Ansatz und definieren Sie natürliche, periodische und eingespannte Splines unter Zug.

Aufgabe 23: Geben Sie einen Algorithmus an, welcher das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 20 mit einem Rechenaufwand löst, der nur linear mit der Anzahl der Stützstellen wächst.

Aufgabe 24: Gegeben sei eine Menge von Punkten $(x_j, y_j)_{1\le j\le n} \in \mathbb{R}^2$, die beispielsweise aus einer Vektorgrafik oder einem gescannten Bild stammen. Erfinden Sie einen Algorithmus, der die durch lineare Interpolation dieser Punkte entstehenden Kanten glättet.



© G. Wanner

Aufgabe 25:

(a) Berechnen Sie mit dem Newton-Schema das Interpolationspolynom $p(x)$ zu folgenden Daten:

x_j	0	1	2	3	4
y_j	-1	-1	-7	-7	35

Berechnen Sie mit diesem Newton-Schema auch alle Ableitungen von p an der Stelle $x = -1$.

(b) Stellen Sie das Polynom $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ mit Hilfe des Newtontableaus in der Form $p(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ dar.

Programmieraufgabe 6: Implementieren Sie die Interpolation mit eingespannten kubischen Splines zu gegebenen Wertepaaren (x_i, y_i), $0 \le i \le n$, und gegebenen Ableitungen $s'(x_0) = v_0$, $s'(x_n) = v_n$ für den Fall äquidistanter Stützstellen. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Lösen Sie das in der Vorlesung hergeleitete lineare Gleichungssystem $Av = b$ zur Bestimmung der fehlenden Ableitungen $v = (v_1, \ldots, v_{n-1})^{\mathrm{T}}$ mit Hilfe des Matlab-Befehls `v = A\b`. Schreiben Sie dazu Funktionen der Gestalt

```
function A = MatrixAufstellen(n)        function b = rechteSeite(xv,yv,v0,vn)
    ⋮                                        ⋮
end                                     end
```

Dabei stehen `xv` und `yv` für die gegebenen Stützstellen und die zugehörigen Werte.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `SplineAuswerten(x,xv,yv,vv)`, welche den Spline an der Stelle $x \in [x_{i-1}, x_i]$ gemäß der in der Vorlesung hergeleiteten Darstellung von $s_i(x)$ auswertet. Berechnen Sie dazu den zu x gehörigen Index i in einer einzigen Programmzeile (z.B. mit dem Befehl `floor`).

Testen Sie Ihre Programme in einem Skript `mainSI.m` anhand des Beispiels aus Aufgabe 18. Schreiben Sie auch ein Skript `mainSI2.m`, welches den Spline zu den Daten von Programmieraufgabe 4(a) (für mindestens 1000 Punkte) plottet.

Besprechung in den Übungen am 30.11.2012
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 06.12.2012 (Donnerstag!)