

6. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 18: Der eingespannte kubische Spline s erfülle die Interpolationsbedingungen

j	0	1	2	3
x_j	0	1	2	3
y_j	-4	9	35	70

sowie $s'(0) = 10$ und $s'(3) = 40$. Berechnen Sie $s(x)$ an der Stelle $x = 1.5$.

Aufgabe 19: Falls die Werte der Ableitungen an den Randpunkten nicht bekannt sind, verwendet man bei der Spline-Interpolation häufig die „not-a-knot“-Bedingungen

$$s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1), \quad s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1}),$$

die besagen, dass der Spline auf den Teilintervallen $[x_0, x_2]$ und $[x_{n-2}, x_n]$ durch je ein einziges kubisches Polynom gegeben ist.

Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ ($j = 0, 1, \dots, n$) das Gleichungssystem für den interpolierenden kubischen Spline mit „not-a-knot“-Bedingungen auf. Zeigen Sie, dass es stets eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 20: (Periodische kubische Spline-Interpolation)

Soll eine periodische Funktion durch einen Spline s dargestellt werden, so verlangt man an Stelle der Endbedingungen für einen natürlichen oder eingespannten Spline, dass die periodische Fortsetzung zweimal stetig differenzierbar ist. Stellen Sie für den Fall äquidistanter Stützstellen das lineare Gleichungssystem für die unbekanntenen Steigungen in den Stützstellen auf und zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit des interpolierenden periodischen Splines.

Hinweis: Sie erhalten eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & * & & & * \\ * & * & * & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & * & * & * \\ * & & & * & * \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 21: Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ ($j = 0, 1, \dots, n$) das Gleichungssystem für den kubischen Spline s mit

$$\begin{aligned} s(x_j) &= 0 && \text{für } j = 0, \dots, n \\ s'(x_0) &= 1 && s'(x_n) = 0 \end{aligned}$$

auf. Zeigen Sie, dass die Steigungen $v_j = s'(x_j)$ mit wachsendem j rasch abfallen.

Interpretation: Störungen in den Ableitungen am Rand wirken sich im interpolierenden Spline auf Intervallen weg von x_0 kaum aus.

Besprechung in den Übungen am 23.11.2012