Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 09.11.2012

5. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 14: Zeigen Sie, dass für ein Polynom p vom Grad n eine brauchbare und leicht zu berechnende Schätzung von $\max_{x\in[-1,1]} |p(x)|$ durch $\max_{k=0,\dots,n} |p(x_k)|$ gegeben ist, falls x_k die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_{n+1} sind: Mit welcher Zahl c_n gilt

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| \le c_n \cdot \max_{k=0,\dots,n} |p(x_k)| \quad ?$$

Aufgabe 15: Bestimmen Sie den Interpolationsfehler des Polynoms, welches eine Funktion $f(x)$ in den drei Punkten $(x_i, f(x_i)),\ i = 0,1,2$, interpoliert und zusätzlich an x_{i_0} die vorgegebene Steigung $f'(x_{i_0})$ besitzt, für ein $i_0 \in \{0,1,2\}$.

Aufgabe 16: Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1T_1(x) + \ldots + c_nT_n(x).$$

Falls

$$\begin{aligned} d_k &= c_k + 2x\, d_{k+1} - d_{k+2} \quad (k = n, n-1, \ldots, 0), \quad d_{n+1} = d_{n+2} = 0, \\ e_k &= d_k + 2x\, e_{k+1} - e_{k+2} \quad (k = n, n-1, \ldots, 1), \quad e_{n+1} = e_{n+2} = 0, \end{aligned}$$

dann ist bekanntlich $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$ (Clenshaw). Zeigen Sie, dass außerdem gilt:

$$p'(x) = e_1 - e_3.$$

Aufgabe 17: Gegeben sei das Interpolationspolynom $p(x)$ von $f(x)$ zu den Stützstellen $x_0, x_0 + \varepsilon, x_0 + 2\varepsilon, \ldots, x_0 + n\varepsilon$, wobei f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar sei.

(a) Zeigen Sie, dass $p(x)$ für $\varepsilon \to 0$ gegen das n-te Taylorpolynom von $f(x)$ in x_0 konvergiert.
(b) Bestimmen Sie die Form des Interpolationsfehlers $f(x) - p(x)$ für $\varepsilon \to 0$.

Programmieraufgabe 5: Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `tsch_koeff`, welche zu einer gegebene Funktion f und einer Zahl n die ersten $n+1$ Koeffizienten der Tschebyscheff-Darstellung zurückgibt. Schreiben Sie eine weitere Matlab-Funktion `clenshaw`, welche unter Verwendung des Clenshaw-Algorithmus das Interpolationspolynom an der Stelle x auswertet. Die Matlab-Funktionen sollen dabei folgende Form besitzen:

```
function [koeff] = tsch_koeff(n)
      ⋮
end
```

```
function [y] = clenshaw(x,koeff,n)
      ⋮
end
```

Die Funktion f soll in der Matlab-Funktion `f_5` realisiert werden. Verwenden Sie dabei f aus Programmieraufgabe 4.
Schreiben Sie ein Hauptprogramm (Matlab-Skript) `mainTI`, welches im Intervall $[-5,5]$ für $n = 4, 6, 8, 10$ die Interpolationspolynome, sowie die Funktion f selbst, in einem Schaubild plottet.

Besprechung in den Übungen am 16.11.2012
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 22.11.2012 (Donnerstag!)