Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.11.2012

4. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 10: Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ zweiten Grades einer Funktion f zu den Daten

$$\begin{array}{c|ccc} x_j & t & t+h/2 & t+h \\ \hline y_j & f(t) & f(t+h/2) & f(t+h) \end{array} \quad t \in \mathbb{R},\ h > 0.$$

Zeigen Sie weiter: Integriert man dieses Polynom von t bis $t+h$, so erhält man die Simpsonregel.

Aufgabe 11: Eine Folge $\{S_n\}$ erfülle

$$S_{n+1} - S = \rho_n (S_n - S) \qquad \text{mit } \rho_n \to \rho, \quad \rho \neq 1.$$

Zeigen Sie, dass die durch die Aitken'sche Δ^2-Regel erhaltene Folge $\{S'_n\}$ schneller als die ursprüngliche Folge gegen S konvergiert, d. h.

$$\frac{S'_n - S}{S_n - S} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Die Folge $\{S'_n\}$ kann gegen S konvergieren, ohne dass $\{S_n\}$ konvergiert.

Aufgabe 12: Gegeben sei die Wertetabelle

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y_i & 8 & 3 & 4 & 8 \end{array}.$$

(a) Man interpoliere die Wertetabelle nach der Interpolationsformel von Newton.
(b) Es seien $(x_4, y_4) = (2, 1)$. Wie lautet das Newtonsche Interpolationspolynom unter Hinzunahme des Punktes (x_4, y_4)?
(c) Man bestimme mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades durch die obigen Wertepaare.

Aufgabe 13:

Zeigen Sie die folgende Fehlerabschätzung für die Trapezregel:

$$\left| \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx}_{=I(f)} - \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_0+h)\big) \right| \leq \frac{h^3}{12} \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f''(x)|,$$

indem Sie $\frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_0+h)\big) = I(\hat{f})$ als Integral über eine f interpolierende Funktion $\hat{f}$ interpretieren und die Restglieddarstellung der Polynominterpolation verwenden.

Programmieraufgabe 4: Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `DivDiff`, welche zu vorgegebenen Stützpunkten (x_k, f_k) mit paarweise verschiedenen x_k den Algorithmus zur Berechnung der dividierten Differenzen realisiert. Schreiben Sie zudem eine Matlab-Funktion `Horner`, welche das Interpolationspolynoms in Newton-Darstellung durch das Horner-Schema an der Stelle x auswertet. Die Matlab-Funktionen sollen folgende Form besitzen:

```
function [koeff] = DivDiff(xk,fk)
      ⋮
end
```

```
function [y] = Horner(x,xk,koeff)
      ⋮
end
```

Schreiben Sie ein Hauptprogramm `mainIA`, welches folgende Punkte realisiert:

(a) Plotten Sie die Interpolationspolynome im Intervall $[-5, 5]$ zu den Daten

$$x_k = \frac{10k}{n} - 5, \qquad f_k = \frac{1}{x_k^2 + 1}, \quad k = 0, \ldots, n$$

für $n = 4, 6, 8, 10$ in ein Schaubild.

(b) Plotten Sie die Interpolationspolynome im Intervall $[-5, 5]$ zu den Daten

$$x_k = 5 \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \qquad f_k = \frac{1}{x_k^2 + 1}, \quad k = 0, \ldots, n$$

für $n = 4, 6, 8, 10$ in ein zweites Schaubild.

(c) Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Benutzen Sie die Befehle `figure(1)` und `figure(2)`, um zwei unterschiedliche Schaubilder zu initialisieren/aufzurufen.

Besprechung in den Übungen am 09.11.2012
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 15.11.2012 (Donnerstag!)