Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.10.2012

3. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 6:

(a) Zeigen Sie: Für jede auf $[a, b]$ positive, stetige Funktion ω ist durch

$$(f, g) := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen reellwertigen Funktionen definiert.

(b) (Formel von Rodrigues) Zeigen Sie: Die bezüglich der Gewichtsfunktion ω auf dem Intervall $[a, b]$ orthogonalen Polynome p_k erfüllen

$$p_k(x) = C_k \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^k}{dx^k} [\omega(x)(x-a)^k (b-x)^k], \quad C_k \in \mathbb{R},$$

falls die rechte Seite ein Polynom vom Grad k ist.

Hinweis: Weisen Sie nach, dass das wie oben definierte Polynom orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$ ist. Verwenden Sie dazu partielle Integration.

Aufgabe 7: Die Legendre-Polynome P_k sind durch die Bedingung $P_k(1) = 1$ normiert.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 6:

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \frac{d^k}{dx^k} [(1-x^2)^k].$$

(b) Zeigen Sie für die Legendre-Polynome die Rekursion

$$P_{k+1}(x) - \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) = -\frac{k}{k+1} P_{k-1}(x).$$

Aufgabe 8: Berechnen Sie die Knoten und Gewichte der Gauß-QF für $s = 3$.

Aufgabe 9: Die Anwendung der Trapezregel auf Teilintervalle der Länge $h := (b-a)/N$ des Integrationsintervalls $[a, b]$ liefert die so genannte Trapezsumme

$$T(h) = h \left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{f(x_N)}{2} \right], \quad x_j := a + jh.$$

Für die Trapezsumme gilt mit $f \in C^{2m+2}[a, b]$ die asymptotische Entwicklung

$$T(h) = \int_a^b f(x)dx + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \cdots + \tau_m h^{2m} + \alpha_{m+1} h^{2m+2},$$

welche wir für diese Aufgabe als gegeben ansehen, mit von h unabhängigen Koeffizienten

$$\tau_k := \frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\big), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

und einem in dieser Aufgabe zuvernachlässigenden Restterm $\alpha_{m+1}(h)$. Hier sind B_k die Bernoullizahlen $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$ ....

(a) Berechnen Sie τ_1, τ_2 für die Funktion aus Aufgabe 2, und begründen Sie damit das gute Konvergenzverhalten der Trapezsumme, welches Sie bei Programmieraufgabe 2 beobachten können. Für welche $h = 4/N$ lässt sich die eigentliche Konvergenzordnung 2 beobachten?

(b) Bilden Sie entsprechend die Summe der Rechteckregel, und begründen Sie damit das gute Konvergenzverhalten der Rechtecksumme. Für welche $h = 4/N$ lässt sich die eigentliche Konvergenzordnung 1 beobachten?

Programmieraufgabe 3: (Adaptive numerische Integration)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `adaptint`, die für Intervallgrenzen a und b und eine vorgegebene Toleranz `tol` das Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

mit Hilfe der Simpsonregel berechnet, wobei der absolute Fehler kleiner als `tol` sein soll. Durch den rekursiven Aufruf von `adaptint` soll das Grundintervall adaptiv zerlegt werden. Zur Schätzung des Fehlers verwenden Sie die Trapezregel. Die Matlab-Funktion soll folgende Form besitzen:

```
function [y] = adaptint(a,b,tol)
        ⋮
end
```

Testen Sie Ihr Programm am Integral der Aufgabe 2. Folgende Punkte sollen realsisiert werden:

(a) Schreiben Sie ein Hauptprogramm (Matlab-Skript) `mainANI`, in dem $a = 0$, $b = 4$, und `tol`$=10^{-5}$ festgelegt werden, das `adaptint(`a`,`b`,tol)` aufruft und das Ergebnis ausgibt.

(b) Realisieren Sie die Simpson- und Trapezregel in Matlab-Funktionen `qf_simpson` und `qf_trapez` der Form:

```
function [y] = qf_...(a,b)
        ⋮
end
```

(c) Die Funktion `adaptint(`a`,`b`,tol)` berechnet *Simpson* und *Trapez* - Näherungen von $\int_a^b f(x)dx$ mit der Simpson- und der Trapezregel. Falls $|Simpson - Trapez| > tol$ wird das Intervall $[a, b]$ halbiert und als Ergebnis `adaptint(`$a, (a+b)/2$`,tol/2) + adaptint(`$(a+b)/2, b$`,tol/2)` zurückgegeben sonst wird als Ergebnis *Simpson* akzeptiert.

Besprechung in den Übungen am 02.11.2012
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 09.11.2012