Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 19.10.2012

2. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 2: Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Integrals $\int_0^4 x^2 e^{-5x} dx$ durch vierfache Verwendung der Simpson-Regel auf äquidistanten Intervallen. Begründen Sie kurz, wie sich bei gleichem Aufwand (gemessen in Funktionsauswertungen des Integranden) der Wert genauer approximieren läßt.

Aufgabe 3: Es seien die Knoten $c_1 = 0$ und $c_3 = 1$ einer Quadraturformel für $s = 3$ vorgegeben. Bestimmen Sie den Knoten c_2 sowie die Gewichte b_1, b_2 und b_3 so, dass die Ordnung der Quadraturformel maximal wird. Wie groß ist die Ordnung Ihrer Quadraturformel?

Aufgabe 4: Zeigen Sie die folgenden Fehlerabschätzungen für die Mittelpunktregel:

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - hf(x_0 + h/2) \right| \leq \frac{h^3}{24} \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f''(x)|.$$

Aufgabe 5: Beweisen Sie

$$\int_0^1 K_p(t)dt = \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{p+1} - \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^p \right).$$

Programmieraufgabe 2: (Numerische Integration)

Schreiben Sie Matlab-Funktionen `sqf_rechteck`, `sqf_trapez` und `sqf_simpson`, die für eine gegebene Funktion f, Grenzen a, b und eine vorgegebene Anzahl N von äquidistanten Teilintervallen das Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

mit der summierten Rechteckregel, Trapezregel und Simpsonregel näherungsweise berechnen. Die Matlab-Funktion sollen folgende Form besitzen:

```
function [y] = sqf_...(a,b,N)
      ⋮
end
```

Testen Sie diese Funktionen am Integral der Aufgabe 2: Schreiben Sie zum einen eine Matlab-Funktion `f_a2`, die $f(x) = x^2 e^{-5x}$ für ein gegebenes x auswertet, und zum anderen ein Hauptprogramm `mainSQF`, in welchem Sie folgenden Punkte realisieren:

(a) Berechnen Sie zunächst eine “exakte” Lösung (eine sogenannte “Referenzlösung”) mit der summierten Simpsonregel und $N = 1000$ Teilintervallen.

(b) Für unterschiedliche Anzahlen an Teilintervallen $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ berechnen Sie Approximationen obiger drei Methoden und den zugehörigen Fehler (Abstand der jeweiligen Approximation zur Referenzlösung).

(c) Plotten Sie für jede der obigen Methoden $h_i = 4/N_i,\ i = 1, ..., 6$, gegen den Fehler doppelt logarithmisch.
Hinweis: `matlab`-*Befehl* `loglog`.

(d) Erklären Sie in einem Kommentar was Sie beobachten.

Besprechung in den Übungen am 26.10.2012
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 02.11.2012