Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 01.02.2013

15. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 53: Zeigen Sie: Ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i, \quad i = 1, \ldots, s \tag{1}$$

angewandt auf die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist äquivalent zu einem Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf das autonome System $z' = F(z)$ mit

$$z = \begin{bmatrix} t \\ y \end{bmatrix}, \quad F(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{bmatrix}.$$

Diskutieren Sie zudem die Voraussetzung (1), indem Sie die innere Stufe Y_i als Näherung von $y(t_0 + c_i h)$ interpretieren.

Aufgabe 54: Ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung q liefert Näherungswerte y_n und zugehörige Funktionswerte $f(t_n, y_n)$. Um eine Lösung auf dem gesamten Intervall zu bestimmen, kann man auf dem Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ die Lösung durch das Hermite-Polynom mit Randwerten y_n, y_{n+1} und Ableitungswerten $f(t_n, y_n), f(t_{n+1}, y_{n+1})$ approximieren.

Für welche Ordnung q ist der Fehler dieser Näherungslösung auf dem gesamten Integrationsintervall durch $\mathcal{O}(h^q)$ beschränkt ?

Aufgabe 55: Auf das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y\,, \quad y(0) = y_0$$

werde ein explizites Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p mit s Stufen angewandt. Zeigen Sie:

(a) $y_1 = P(h\lambda) y_0$, wobei $P(z)$ ein Polynom vom Grad s ist.

(b) Falls $p = s$, so gilt
$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^p}{p!}.$$

Aufgabe 56: Weisen Sie nach, dass das klassische Runge-Kutta-Verfahren die Ordnung 4 hat. (Mit Bäumen oder, wenn Sie viel Zeit und Geduld haben, ohne Bäume.)

Programmieraufgabe 12: (Numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen)

Programmieren Sie das explizite und das implizite Euler-Verfahren realisiert in Funktionen `expl_Euler` und `impl_Euler` zur Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabe 49.

Überprüfen Sie mit diesem Programm Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 49: Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0?

Besprechung in den Übungen am 08.02.2013
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 22.02.2013