Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 25.01.2013

14. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 49: Die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 998 & -1998 \\ 999 & -1999 \end{pmatrix}$$

werde mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Zeigen Sie: Die exakte Lösung erfüllt $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0?
Hinweis: Diagonalisierung von A.

Aufgabe 50: Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = Ay + g(t, y)$, wobei $\mu(A) \leq \ell$ und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle (vgl. Aufgabe 47). Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n))$$

betrachtet. Zeigen Sie:

(a) Falls $\ell + L \leq 0$, so gilt für zwei beliebige Lösungen y, z

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| \qquad \text{für } t \geq t_0.$$

(b) Die numerische Lösung zu zwei Anfangswerten y_0, z_0 erfüllt für beliebige Schrittweiten $h > 0$

$$\|y_1 - z_1\| \leq \|y_0 - z_0\|,$$

verhält sich also wie die exakte Lösung.

Aufgabe 51: In dieser Aufgabe wird zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ die implizite Mittelpunktsregel betrachtet:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als implizites Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens.

Aufgabe 52: Zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ verwende man für ein festes $\theta \in [0, 1]$ das θ-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f(y_{n+1}) + (1 - \theta) f(y_n)).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an. Wie nennt man die Verfahren für $\theta = 0$ bzw. $\theta = 1$?

(b) Bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens in Abhängigkeit von θ.
Hinweis: Verwenden Sie, dass das Verfahren höchstens Ordnung 2 hat.

Besprechung in den Übungen am 01.02.2013