Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 21.12.2012

11. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 37:

(a) Seien y, z zwei Vektoren von Gleitpunktzahlen. Das Standardskalarprodukt lässt sich rekursiv durch $\langle y, z\rangle = z_n y_n + \langle y^{n-1}, z^{n-1}\rangle$ berechnen, wobei $y^{n-1} := (y_1, \cdots, y_{n-1})^T$, z^{n-1} analog. Zeigen Sie: Das in Gleitpunktrechnung erhaltene Ergebnis $\langle y, z\rangle_{fl}$ des Skalarproduktes ist gleich $\langle \hat{y}, z\rangle$ für ein $\hat{y}$ mit

$$|y - \hat{y}| \leq n|y|\mathrm{eps} + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2).$$

(b) Seien L, R untere bzw. obere Dreiecksmatrizen von Gleitpunktzahlen, b, c Vektoren von Gleitpunktzahlen. Zeigen Sie: Die in Gleitpunktrechnung erhaltenen Ergebnisse $\hat{x}$, $\hat{y}$ für die Gleichungssysteme $Ly = b$, $Rx = c$ sind die exakten Lösungen von $\hat{L}\hat{y} = b$ mit $|L - \hat{L}| \leq n|L|\mathrm{eps} + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2)$ bzw. $\hat{R}\hat{x} = c$ mit $|R - \hat{R}| \leq n|R|\mathrm{eps} + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2)$.
Hinweis: Beachten Sie Aufgabenteil (a).

Aufgabe 38: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, ist die Konditionszahl definiert durch $\mathrm{cond}(A) = \dfrac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|y\|=1} \|Ay\|}$.
Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix}\tilde{R}\\ 0\end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass für die zur euklidischen Norm gehörende Kondition cond_2 gilt:

(a) $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(R) = \mathrm{cond}_2(\tilde{R}) \geq \dfrac{\max_{i=1,\dots,n} |r_{ii}|}{\min_{k=1,\dots,n} |r_{kk}|}$.

(b) $\mathrm{cond}_2(A^T A) = \mathrm{cond}_2(A)^2$.

Aufgabe 39: Sei Q eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix, $n > 1$. Zeigen Sie, dass Q als Produkt von höchstens n Householder-Transformationen geschrieben werden kann (d.h., jede orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^n$ ist eine Hintereinanderausführung von höchstens n Reflexionen).

Aufgabe 40: Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

Programmieraufgabe 10: (QR-Zerlegung)
Schreiben Sie eine Funktion `qr_zerl`, welche zu einer Matrix A die Matrizen Q und R der QR-Zerlegung bestimmt, wobei Q nicht explizit berechnet werden soll. Vielmehr sollen die Einträge der Restmatrix R, die normierten Householdervektoren u_i und die skalaren Größen α_i geschickt in einer Matrix M gespeichert werden. Realisieren Sie zudem eine Funktion `rechteSeite`, welche zur rechten Seite b das Produkt $Q^{\mathrm{T}}b$ berechnet, indem Sie b und die Matrix M übergeben. Die

Matlab-Funktionen sollen die folgende Struktur besitzen:

```
function M = qr_zerl(A)          function c = rechteSeite(b,M)
    ⋮                                ⋮
end                              end
```

Erweitern Sie zudem die Funktion `RueckSub` aus Programmieraufgabe 9, um $Rx = c$ zu lösen.

Testen Sie Ihr Programm am linearen Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 = \min!$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -5 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

in einem Skript `mainQR`.

Die Arbeitsgruppe Numerik wünscht Ihnen schöne Feiertage und einen guten Start ins neue Jahr.

Auf der Übungshomepage finden Sie eine Zusammenstellung von Aufgaben zur Klausurvorbereitung.

Besprechung in den Übungen am 11.01.2013
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 10.01.2013 (Donnerstag!)