Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 14.12.2012

10. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 33: Zeigen Sie:

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{\max_{\|y\|=1} \|Ay\|}{\min_{\|z\|=1} \|Az\|}.$$

Mit Hilfe der rechten Seite lässt sich die Kondition auch für nichtquadratische Matrizen definieren.

Aufgabe 34: Es sei die Cholesky–Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $A = LL^T$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für $i = 1,\dots,n$ gilt $\|L\|_2^2 = \max\limits_{\mathbf{x}\neq 0} \dfrac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \geq l_{ii}^2$.

(b) Für $i = 1,\dots,n$ gilt $l_{ii}^2 \geq \min\limits_{\mathbf{x}\neq 0} \dfrac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \dfrac{1}{\|L^{-1}\|_2^2}$.

(c) Für die Konditionszahl $\mathrm{cond}_2(L) = \|L\|_2\,\|L^{-1}\|_2$ gilt $\mathrm{cond}_2(L) \geq \max\limits_{1\leq i,k\leq n} \left|\dfrac{l_{ii}}{l_{kk}}\right|$

Aufgabe 35: Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \bar{R} & \bar{v} \\ \hline \bar{u}^T & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

wobei $\bar{R} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist, $\bar{u},\bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Geben Sie die Dreieckszerlegung von A an und zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\bar{u}^T\bar{R}^{-1}\bar{v} \neq 0$ gilt.

(b) Formulieren Sie einen sparsamen Algorithmus zur Berechnung von x in Pseudo-Code. Wieviele und welche Operationen sind nötig?

Aufgabe 36:

(a) Sei $A = LR$ die LR-Zerlegung der $(n\times n)$-Matrix A mit $|l_{ij}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{i,j} |r_{ij}| \leq 2^{n-1} \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie die Beziehung $r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$ für die Zeilen a_i^T und r_i^T von A und R und Induktion.

(b) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tritt Gleichheit in obiger Abschätzung auf.

Besprechung in den Übungen am 21.12.2012