

13. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 46: Die Differentialgleichung

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 998 & -1998 \\ 999 & -1999 \end{pmatrix}$$

werde mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Zeigen Sie: Die exakte Lösung erfüllt $y(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0?

Hinweis: Diagonalisierung von A .

Aufgabe 47: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = Ay + g(t, y),$$

wobei $\mu(A) \leq \ell$ und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle (vgl. Aufgabe 44). Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n))$$

betrachtet. Zeigen Sie:

- (a) Falls $\ell + L \leq 0$, so gilt für zwei beliebige Lösungen y, z

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| \quad \text{für } t \geq t_0.$$

- (b) Die numerische Lösung zu zwei Anfangswerten y_0, z_0 erfüllt für beliebige Schrittweiten $h > 0$

$$\|y_1 - z_1\| \leq \|y_0 - z_0\|,$$

verhält sich also wie die exakte Lösung.

Aufgabe 48: In dieser Aufgabe wird zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ die implizite Mittelpunktsregel betrachtet:

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right).$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als implizites Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an.
- (b) Bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens.

Aufgabe 49: Zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ verwende man für ein festes $\theta \in [0, 1]$ das θ -Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f(y_{n+1}) + (1 - \theta)f(y_n)).$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an. Wie nennt man die Verfahren für $\theta = 0$ bzw. $\theta = 1$?

- (b) Bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens in Abhängigkeit von θ .
Hinweis: Verwenden Sie, dass das Verfahren höchstens Ordnung 2 hat.

Programmieraufgabe 10: (Numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen)

Programmieren Sie das explizite und das implizite Euler-Verfahren realisiert in Funktionen `expl.Euler` und `impl.Euler` zur Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabe 46.

Überprüfen Sie mit diesem Programm Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 46: Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0?

Besprechung in den Übungen am 26.01.2011.

Abgabe der Programmieraufgabe 10 bis zum 28.01.2011.

Klausurtermin: Montag, der 31.01.2011, von 16–18 Uhr in N5, N6.