Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 12.01.2011

12. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 42: Es seien $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \le n$. Zeigen sie:

(a) Falls $v^T M v > 0$ für alle $v \neq 0$ mit $Gv = 0$ und G vollen Rang besitzt, so ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar.

(b) Falls M symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine Zerlegung der Form

$$\begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ GL^{-T} & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & L^{-1}G^T \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Wieviele Operationen sind zur Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit einer derartigen Matrix nötig?

Hinweis: Choleski-Zerlegung von M, QR-Zerlegung.

Aufgabe 43: Geben sie einen effizienten (lokal konvergenten) Algorithmus an zur Lösung des Ausgleichsproblems mit nichtlinearen Nebenbedingungen:

$$\|Ax - b\| = \min!$$
$$g(x) = 0$$

Hierbei sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \ge n)$ mit vollem Rang, $b \in \mathbb{R}^m$, die gesuchte Lösung $x \in \mathbb{R}^n$. Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ mit $l < n$ sei zweimal stetig differenzierbar und $g'(x)$ habe vollen Rang.

Hinweis: Linearisieren Sie die Nebenbedingung in Anlehnung an das Newton- und das Gauß-Newton-Verfahren. Führen Sie dann einen Lagrangemultiplikator λ ein. Aufgabe 42!

Aufgabe 44: Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Für $y, z \in D$ gilt

$$\langle f(y) - f(z), y - z\rangle \le \ell \cdot \|y - z\|^2 \qquad \text{mit } \ell = \sup_{u\in D} \mu\left(f'(u)\right)$$
$$\|f(y) - f(z)\| \le L \cdot \|y - z\| \qquad \text{mit } L = \sup_{u\in D} \|f'(u)\|,$$

wobei für euklidische Norm und Skalarprodukt und reelle $d \times d$-Matrizen A

$$\mu(A) = \sup_{v\neq 0} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|^2} = \text{größter Eigenwert von } \frac{1}{2}(A + A^T),$$
$$\|A\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^T A}.$$

Hinweis: $f(y) - f(z) = \int_0^1 f'(z + t(y - z)) \cdot (y - z)\, dt$ und $\langle Av, v\rangle = \langle \frac{1}{2}(A + A^T)v, v\rangle$.

Aufgabe 45: Es sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ gegeben. Aufgrund von Rundungsfehlern berechnet man beim Euler-Verfahren an Stelle von

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

gestörte Werte

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n) + \delta_n.$$

Es sei $\tilde{y}_0 = y_0$ und es gelte $\|\delta_n\| \leq \delta$. Zeigen Sie: Falls f einer Lipschitzbedingung mit Konstante L genügt, so ist

$$\|\tilde{y}_n - y_n\| \leq M\frac{\delta}{h}$$

mit $M = (e^{L(T-t_0)} - 1)/L$ für $t_n \in [t_0, T]$.
Hinweis: Lady Windermere's Fächer.

Programmieraufgabe 9: (Newton-Verfahren)

Schreiben Sie eine Funktion `newton`, die für eine feste Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und für gegebenen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Newton-Iterationen bis zu $\|\Delta x_k\| \leq$ `TOL` durchführt. Die Funktion soll die Jakobimatrix $f'(x)$ numerisch berechnen (mit zentralen Differenzen). Benutzen Sie zum Lösen des linearen Gleichungssystems die LR-Zerlegung aus Programmieraufgabe 7.

Testen Sie diese Funktion am System

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= 11 \\ x_1x_2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

zum Beispiel mit Startwert $(4, -2, 0)^T$ in einem Programm `p09`. Damit berechnen Sie zugleich alle Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (Vieta).

Besprechung in den Übungen am 19.01.2011.
Abgabe der Programmieraufgabe 8 bis zum 18.01.2011.
Abgabe der Programmieraufgabe 9 bis zum 25.01.2011.
Klausurtermin: Montag, der 31.01.2011, von 16–18 Uhr in N5, N6.