Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 15.12.2010

11. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 39: Sei p ein Polynom vom Grad n, dessen Nullstellen $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_n$ reell seien.

(a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren gegen ξ_1 konvergiert, falls der Startwert $x_0 > \xi_1$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ für $x > \xi_1$ das gleiche Vorzeichen haben. Zeigen Sie dann, dass das Newton-Verfahren eine monoton abnehmende Folge liefert.

(b) Falls x_0 viel größer als ξ_1 ist, konvergiert das Newton-Verfahren sehr langsam ($x_{k+1} \approx (1 - \frac{1}{n})x_k$).

Aufgabe 40:

(a) Berechnen Sie iterativ $x = 1/a$ für ein gegebenes $a \neq 0$ ohne Division. Für welche Startwerte x_0 konvergiert das Verfahren?

(b) Geben Sie ein lokal quadratisch konvergentes Iterationsverfahren zur Berechnung von $x = \sqrt{a}$ für $a > 0$ an. Verwenden Sie dabei nur die arithmetischen Grundoperationen.

Aufgabe 41: Zeigen Sie für das gewöhnliche Newton-Verfahren unter den Voraussetzungen des Newton-Mysovskii-Theorems die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \|x_k - x^*\| &\leq \alpha \frac{\gamma^{2^k-1}}{1-\gamma^{2^k}}, \\ \|x_k - x^*\| &\leq \frac{\omega}{2(1-\gamma^{2^k})} \|x_k - x_{k-1}\|^2. \end{aligned}$$

Programmieraufgabe 8: Schreiben Sie eine Funktion `qr_zerlegung` (Eingabe: A, Ausgabe: überschriebene Matrix A, die um eine Zeile erweitert ist), welche zu einer invertierbaren Matrix A die Matrizen Q und R der QR-Zerlegung bestimmt, wobei Q nicht explizit berechnet werden soll. Vielmehr sollen die Einträge der Restmatrix R, die normierten Householdervektoren u_i und die skalaren Größen α_i in der um eine Zeile erweiterten Matrix A geschickt gespeichert werden. Realisieren Sie zudem eine Funktion `rechteSeite`, welche zur rechten Seite b das Produkt $Q^T b$ berechnet, indem Sie b und die überschriebene Matrix A übergeben und daraus den Ergebnisvektor c berechnen. Benutzen Sie die Funktion `rueckwaerts_sub` aus Programmieraufgabe 7, um $Rx = c$ zu lösen.

Testen Sie Ihr Programm mit den Daten aus Programmieraufgabe 7 und am linearen Ausgleichsproblem $\|A - xb\|_2 = \min!$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -5 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

in einem Programm `p08`, und geben Sie die Lösungen aus..

Die Arbeitsgruppe Numerik wünscht Ihnen schöne Feiertage und einen guten Start im neuen Jahr.

Besprechung in den Übungen am 12.01.2011
Klausurtermin: Montag, der 31.01.2011, von 16-18 Uhr