

10. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 35: Die Vektoren $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$ seien gegeben. Geben Sie einen Algorithmus zur Berechnung einer Householder-Matrix P an, so dass $Px = \alpha y$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 36: Sei Q eine orthogonale $(n \times n)$ -Matrix, $n > 1$. Zeigen Sie, dass Q als Produkt von höchstens n Householder-Transformationen geschrieben werden kann (d.h., jede orthogonale Transformation des \mathbb{R}^n ist eine Hintereinanderausführung von höchstens n Reflexionen).

Aufgabe 37: Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

Aufgabe 38: (Ausgleichsgerade)

Es liege das mathematische Gesetz $y = x_1 z + x_2$ mit zwei unbekanntem Parametern x_1, x_2 vor, zu dem ein Satz von Messdaten $\{y_l, z_l\}_{l=1, \dots, m}$ mit $z_l = l$ gegeben sei.

- Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = y$ auf. Wie lautet die Normalgleichung für das lineare Ausgleichsproblem?
- Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LL^T$.
- Schätzen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_2(L)$ mit Hilfe von Aufgabe 30 ab.