Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 08.12.2010

9. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 31: Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \bar{R} & \bar{v} \\ \hline \bar{u}^T & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

wobei $\bar{R} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist, $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Geben Sie die Dreieckszerlegung von A an und zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\bar{u}^T\bar{R}^{-1}\bar{v} \neq 0$ gilt.

(b) Formulieren Sie einen sparsamen Algorithmus zur Berechnung von x in Pseudo-Code. Wieviele und welche Operationen sind nötig?

Aufgabe 32:

(a) Sei $A = LR$ die LR-Zerlegung der $(n \times n)$-Matrix A mit $|l_{ij}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{i,j} |r_{ij}| \leq 2^{n-1} \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$ für die Zeilen a_i^T und r_i^T von A und R und Induktion.

(b) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tritt Gleichheit in obiger Abschätzung auf.

Aufgabe 33: Seien L, R untere bzw. obere Dreiecksmatrizen von Gleitpunktzahlen, b, c Vektoren von Gleitpunktzahlen. Zeigen Sie: Die in Gleitpunktrechnung erhaltenen Ergebnisse $\hat{x}$, $\hat{y}$ für die Gleichungssysteme $Ly = b$, $Rx = c$ sind die exakten Lösungen von $\hat{L}\hat{y} = b$ mit $|L-\hat{L}| \leq n|L|\text{eps}+\mathcal{O}(\text{eps}^2)$ bzw. $\hat{R}\hat{x} = c$ mit $|R - \hat{R}| \leq n|R|\text{eps} + \mathcal{O}(\text{eps}^2)$.

Aufgabe 34: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, ist die Konditionszahl definiert durch $\text{cond}(A) = \dfrac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|y\|=1} \|Ay\|}$.

Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass für die zur euklidischen Norm gehörende Kondition cond_2 gilt:

(a) $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R) = \text{cond}_2(\tilde{R}) \geq \dfrac{\max_{i=1,\dots,n} \|r_{ii}\|}{\min_{k=1,\dots,n} \|r_{kk}\|}$.

(b) $\text{cond}_2(A^TA) = \text{cond}_2(A)^2$.

Besprechung in den Übungen am 15.12.2010
Klausurtermin: Montag, der 31.01.2011, von 16-18 Uhr