

7. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 23: Jedes Element T_{ik} im h^2 -Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen.

- (a) Zeigen Sie, dass $T_{2,2}$ bei Verwendung der Folge $\{n_j\} = \{1, 2, 3\}$ der Simpsonregel entspricht.
- (b) Welcher Quadraturformel entspricht $T_{3,3}$?

Aufgabe 24: Berechnen Sie $\arctan''(1)$ durch Extrapolation für $h = 1/n$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ so, dass der Fehler $|e_j| := |T_{j,j} - T_{j,j-1}|$ kleiner als 10^{-5} ist oder $|e_j| > |e_{j-1}|$ gilt. Gerne schreiben Sie dazu ein Matlab-Programm, welches nicht abgegeben werden soll.

Aufgabe 25: Seien A und T $n \times n$ Matrizen und T invertierbar. Geben Sie einen Algorithmus an, der $T^{-1}AT$ in $\frac{7}{3}n^3 + O(n^2)$ Operationen berechnet.

Berechnen Sie mit diesem Algorithmus $T^{-1}AT$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 19 \\ 0 & -12 & 50 \\ 9 & -18 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26: Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen (falls durchführbar) die Struktur von Bandmatrizen in folgendem Sinne erhält: Falls $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > p$, so ist $l_{ij} = 0$ für $i - j > p$ und $r_{ij} = 0$ für $j - i > p$.

Wie viele Operationen sind zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer derartigen Matrix nötig?