Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 10.11.2010

5. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 16: Gegeben sei das Interpolationspolynom $p(x)$ von $f(x)$ zu den Stützstellen $x_0, x_0 + \varepsilon, x_0 + 2\varepsilon, \ldots, x_0 + n\varepsilon$, wobei f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar sei.

(a) Bestimmen Sie die Form von $p(x)$ für $\varepsilon \to 0$.
(b) Bestimmen Sie die Form des Interpolationsfehlers $f(x) - p(x)$ für $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 17: Der eingespannte kubische Spline s erfülle die Interpolationsbedingungen

j	0	1	2	3
x_j	0	1	2	3
y_j	-4	9	35	70

sowie $s'(0) = 10$ und $s'(3) = 40$. Berechnen Sie $s(x)$ an der Stelle $x = 1.5$.

Aufgabe 18: Falls die Werte der Ableitungen an den Randpunkten nicht bekannt sind, verwendet man bei der Spline-Interpolation häufig die „not-a-knot"-Bedingungen

$$s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1), \qquad s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1}),$$

die besagen, dass der Spline auf den Teilintervallen $[x_0, x_2]$ und $[x_{n-2}, x_n]$ durch je ein einziges kubisches Polynom gegeben ist.

Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ das Gleichungssystem für den interpolierenden kubischen Spline mit „not-a-knot"-Bedingungen auf. Zeigen Sie, dass es stets eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 19: (Periodische kubische Spline-Interpolation)

Soll eine periodische Funktion durch einen Spline s dargestellt werden, so verlangt man an Stelle der Endbedingungen für einen natürlichen oder eingespannten Spline, dass die periodische Fortsetzung zweimal stetig differenzierbar ist. Stellen Sie für den Fall äquidistanter Stützstellen das lineare Gleichungssystem für die unbekannten Steigungen in den Stützstellen auf und zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit des interpolierenden periodischen Splines.

Hinweis: Sie erhalten eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \star & \star & & & \star \\ \star & \star & \star & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \star & \star & \star \\ \star & & & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Besprechung in den Übungen am 17.11.2010