Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 03.11.2010

4. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 12: Die Anwendung der Trapezregel auf Teilintervalle der Länge $h := (b-a)/N$ des Integrationsintervalls $[a,b]$ liefert die so genannte Trapezsumme

$$T(h) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{f(x_N)}{2}\right], \quad x_j := a + jh.$$

Für die Trapezsumme gilt mit $f \in C^{2m+2}[a,b]$ die asymptotische Entwicklung

$$T(h) = \int_a^b f(x)dx + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \cdots + \tau_m h^{2m} + \alpha_{m+1} h^{2m+2},$$

welche wir für diese Aufgabe als gegeben ansehen, mit von h unabhängigen Koeffizienten

$$\tau_k := \frac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\big), \quad k = 1,2,\dots,m$$

und

$$\alpha_{m+1}(h) = \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(b-a)f^{(2m+2)}(\xi(h)), \quad \xi(h) \in [a,b].$$

Hier sind B_k die Bernoullizahlen $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$ ....

(a) Berechnen Sie τ_1, τ_2 für die Funktion aus Aufgabe 2, und begründen Sie damit das gute Konvergenzverhalten der Trapezsumme, welches Sie bei der Programmierung beobachtet haben. Für welche $h = 4/N$ lässt sich die eigentliche Konvergenzordnung 2 beobachten?

(b) Bilden Sie entsprechend die Summe der Rechteckregel, und begründen Sie damit das gute Konvergenzverhalten der Rechtecksumme, welches Sie bei der Programmierung beobachtet haben. Für welche $h = 4/N$ lässt sich die eigentliche Konvergenzordnung 1 beobachten?

Aufgabe 13: Zeigen Sie, dass für ein Polynom p vom Grad n eine brauchbare und leicht zu berechnende Schätzung von $\max_{x\in[-1,1]} |p(x)|$ durch $\max_{k=0,\dots,n} |p(x_k)|$ gegeben ist, falls x_k die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_{n+1} sind: Mit welcher Zahl c_n gilt

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| \le c_n \cdot \max_{k=0,\dots,n} |p(x_k)| \quad ?$$

Aufgabe 14: Zeigen Sie: Die Tschebyscheff-Polynome $T_0, T_1, \dots$ sind orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)\,dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $x = \cos(\varphi)$.

Aufgabe 15: Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x).$$

Falls

$$\begin{array}{lll} d_k = c_k + 2x\, d_{k+1} - d_{k+2} & (k = n, n-1, \ldots, 0), & d_{n+1} = d_{n+2} = 0, \\ e_k = d_k + 2x\, e_{k+1} - e_{k+2} & (k = n, n-1, \ldots, 1), & e_{n+1} = e_{n+2} = 0, \end{array}$$

dann ist bekanntlich $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$ (Clenshaw). Zeigen Sie, dass außerdem gilt:

$$p'(x) = e_1 - e_3.$$

Programmieraufgabe 3: (Adaptive numerische Integration)

Schreiben Sie eine Funktion `adaptint(`a`,`b`,tol)`, die für Intervallgrenzen a und b und eine vorgegebene Toleranz `tol` das Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

mit Hilfe der Simpsonregel berechnet, wobei der absolute Fehler kleiner als `tol` sein soll. Durch den rekursiven Aufruf von `adaptint(`a`,`b`,tol)` soll das Grundintervall adaptiv zerlegt werden. Zur Schätzung des Fehlers verwenden Sie als eingebettete Quadraturformel die Trapezregel.

Testen Sie Ihr Programm am Integral der Aufgabe 2 mit `tol`$= 10^{-5}$ und geben Sie die berechnete Intervallunterteilung aus.

Anleitung: Schreiben Sie ein Hauptprogramm p03.m, in dem $a = 0$, $b = 4$, und `tol`$=10^{-5}$ festgelegt werden, das `adaptint(`a`,`b`,tol)` aufruft und das Ergebnis ausgibt.
Die Funktion `adaptint(`a`,`b`,tol)` berechnet *Simpson* und *Trapez* - Näherungen von $\int_a^b f(x)dx$ mit der Simpson- und der Trapezregel. Nennen Sie die entsprechenden Matlab-Funktionen `qf_simpson.m` und `qf_trapez.m`. Falls $|Simpson - Trapez| > tol$ wird das Intervall $[a, b]$ halbiert und als Ergebnis `adaptint(`$a, (a+b)/2$`,tol/2)` + `adaptint(`$(a+b)/2, b$`,tol/2)` zurückgegeben sonst wird als Ergebnis *Simpson* akzeptiert.

Besprechung in den Übungen am 10.11.2010
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 16.11.2010