Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.10.2010

2. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 4: Zeigen Sie die folgenden Fehlerabschätzungen für die Rechteck- und die Mittelpunktregel:

(a)
$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - hf(x_0) \right| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x\in[x_0,x_0+h]} |f'(x)|.$$

(b)
$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - hf(x_0+h/2) \right| \leq \frac{h^3}{24} \max_{x\in[x_0,x_0+h]} |f''(x)|.$$

Aufgabe 5:

(a) Zeigen Sie: Für jede auf $[a, b]$ positive, stetige Funktion ω ist durch

$$(f, g) := \int_a^b \omega(x)f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen reellwertigen Funktionen definiert.

(b) (Formel von Rodrigues) Zeigen Sie: Die bezüglich der Gewichtsfunktion ω auf dem Intervall $[a, b]$ orthogonalen Polynome p_k erfüllen

$$p_k(x) = C_k \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^k}{dx^k} [\omega(x)(x-a)^k(b-x)^k], \quad C_k \in \mathbb{R},$$

falls die rechte Seite ein Polynom vom Grad k ist.

Hinweis: Weisen Sie nach, dass das wie oben definierte Polynom orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$ ist. Verwenden Sie dazu partielle Integration.

Aufgabe 6:

Die Legendre-Polynome P_k sind durch die Bedingung $P_k(1) = 1$ normiert.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 5:

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \frac{d^k}{dx^k} [(1-x^2)^k].$$

(b) Zeigen Sie für die Legendre-Polynome die Rekursion

$$P_{k+1}(x) - \frac{2k+1}{k+1} xP_k(x) = -\frac{k}{k+1} P_{k-1}(x).$$

Aufgabe 7: Gesucht ist eine symmetrische Quadraturformel der Form

$$b_1 f(0) + b_2 f(c_2) + b_3 f(c_3) + b_4 f(1) \approx \int_0^1 f(x)dx.$$

Bestimmen Sie die Parameter $c_2, c_3 \in (0,1)$ und die Gewichte b_i so, dass die Ordnung der Quadraturformel möglichst groß ist.

Programmieraufgabe 2: (Numerische Integration)

Schreiben Sie Funktionen namens `qf_rechteck`, `qf_trapez` und `qf_simpson`, die für eine gegebene Funktion f, Grenzen a, b und eine vorgegebene Anzahl N von äquidistanten Teilintervallen das Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

mit der Rechteckregel, der Trapezregel und der Simpsonregel näherungsweise berechnen. Eingabeparameter für die Funktionen `qf_...` sollen also a, b und N sein.

Testen Sie diese Funktionen am Integral der Aufgabe 2: Schreiben Sie zum einen eine Funktion `f_a2`, die $f(x) = x^2 e^{-5x}$ für ein gegebenes x auswertet, und zum anderen ein Hauptprogramm, in welchem mittels der Funktionen `qf_...` für $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ jeweils die näherungsweisen Integrale von f auf dem Intervall [0, 4] berechnet werden.

Untersuchen Sie für die genannten Verfahren die Abhängigkeit des Fehlers von $h = 4/N$, indem Sie eine „exakte“ Lösung (Referenzlösung) mit der Simpsonregel für $N = 1000$ berechnen.

Tragen Sie den Logarithmus des Fehlers als Funktion von $\log(h)$ auf. Es ergeben sich die Fehlerkurven der Verfahren annähernd als Geraden der Steigungen 1,2 und 4. Warum?

Besprechung in den Übungen am 27.10.2010
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 03.11.2010