

1. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 1: (Landau-Notation)

Für (reelle) Funktionen f und g schreiben wir $f = \mathcal{O}(g)$ für $x \rightarrow a$, ($a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), falls es eine Umgebung U von a und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ für alle } x \in U$$

(oder etwas präziser, falls $\limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty$). Anschaulich bedeutet dies, dass die Funktion f in einer Umgebung von a nicht schneller wächst als die Funktion g .

Gegeben seien die Funktionen

$$x^3, \quad \log(x), \quad 2^x, \quad x^2, \quad x^3 + 1000x^2, \quad e^x.$$

Vergleichen Sie das Wachstum dieser Funktionen für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow 0$ mit Hilfe der oben beschriebenen \mathcal{O} -Notation.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Integrals $\int_0^4 x^2 e^{-5x} dx$ durch vierfache Verwendung der Simpson-Regel auf äquidistanten Intervallen. Begründen Sie kurz, wie sich bei gleichem Aufwand (gemessen in Funktionsauswertungen des Integranden) der Wert genauer approximieren läßt.

Aufgabe 3: Es seien die Knoten $c_1 = 0$ und $c_3 = 1$ einer Quadraturformel für $s = 3$ vorgegeben. Bestimmen Sie den Knoten c_2 sowie die Gewichte b_1 , b_2 und b_3 so, dass die Ordnung der Quadraturformel maximal wird. Wie groß ist die Ordnung Ihrer Quadraturformel?

Programmieraufgabe 1: Schreiben Sie ein Programm, das die Näherungswerte $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \approx e^x$ berechnet und plottet für $x = -5, 5$ und $n = 1, 2, \dots, 30$. Die Berechnung soll auf folgende drei Arten erfolgen:

- mittels obiger Formel
- mit der Umformung $e^{-5,5} = 1/e^{5,5}$ und obiger Formel
- mit der Umformung $e^{-5,5} = (e^{-0,5})^{11}$ und obiger Formel

Erklären Sie die beobachteten Effekte. Verwenden Sie für die Darstellung der Zahlenwerte in erhöhter Genauigkeit den Befehl `format long`.

Hinweis: Diese Programmieraufgabe ist fakultativ.

Besprechung in den Übungen am 20.10.2010

Die Übungen finden mittwochs von 10–12, 12–14 und 14–16 Uhr statt. Die Einteilung der Übungsgruppen finden Sie gegen Ende der Woche auf der Internetseite: http://na.uni-tuebingen.de/ex/num1_ws10/.